МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

ОЛЬГА БОРИСЕНКО

АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ: ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА

КИЇВ – 2012

Рекомендовано науково-методичною радою
Національного центру
«Мала академія наук України»
(протокол № 1 від 23.01.2012 р.)

Борисенко О. Алгебраїчні вирази: теорія та практика : навч.-метод. посіб. / Ольга Борисенко ; [відп. за вип. О. Лісовий]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2012. – 36 с.

У навчально-методичному посібнику подано вибрані розділи з алгебри, зміст котрих спрямований на розвиток математичних здібностей учнів.

Посібник адресований педагогам Малої академії наук України, вчителям загальноосвітніх шкіл, викладачам професійно-технічних навчальних закладів, старшокласникам, студентам вищих навчальних закладів.

ВСТУП

Фундаментальна математична освіта є одним із основних факторів підготовки учнів МАН, їх дослідницької діяльності, формування наукового світогляду, розуміння сутності практичної спрямованості математичних дисциплін. Головними завданнями навчання математики в Малій академії наук України є:

оволодіння учнями системою математичних знань, умінь і навичок, що дає уявлення про математичні прийоми і методи пізнання, вживані в математиці;

розвиток пізнавального інтересу, математичних здібностей, дослідницької компетентності обдарованих учнів;

виховання активності, самостійності, відповідальності; розвиток здатності учнів до адекватної діяльності в життєвих ситуаціях.

Під час роботи з дітьми, здібними до точних наук, важливо враховувати і розвивати також креативність мислення учнів, творчу уяву, винахідливість, вміння вирішувати складні проблеми власної діяльності, генерувати нові ідеї.

На Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України виконання контрольних робіт – це фундаментальна перевірка навчальних досягнень учасників із базових дисциплін. Випробування з математики проводяться для старшокласників у багатьох наукових відділеннях МАН, зокрема, безпосередньо математики, комп'ютерних наук, економіки, фізики і астрономії, технічних наук. У цілому члени журі відзначають достатній рівень підготовки більшості учасників змагань. Проте деякі завдання викликають значні труднощі у дітей, оскільки потребують нестандартних підходів чи спеціальних прийомів.

Запропонований навчально-методичний посібник розроблено Ольгою Володимирівною Борисенко, головою предметної комісії з математики ІІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України, доцентом кафедри математичної фізики фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», кандидатом фізико-математичних наук.

Ці матеріали допоможуть учням самостійно підготуватися до випробувань з алгебри за певними розділами, поглибити та поширити знання з питань, які вони вважають необхідними для більш ґрунтовного вивчення, розвинути математичні здібності. В свою чергу для наукових керівників підібрані завдання стануть навчально-методичною базою у роботі з обдарованими учнями МАН України.

О. Лісовий,
директор Національного центру
«Мала академія наук України»

1. АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ. АБСОЛЮТНА ВЕЛИЧИНА ЧИСЛА. ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ

Областю допустимих значень (ОДЗ) алгебраїчного виразу називається множина всіх числових значень букв, які входять до нього, при яких алгебраїчний вираз має зміст.

Тотожнім перетворенням алгебраїчного виразу називається заміна його іншим алгебраїчним виразом, який має для кожного числового набору із ОДЗ початкового виразу ті самі значення.

Розкладом многочлена на множники називається подання його у вигляді добутку двох або декількох многочленів. При цьому користуються формулами скороченого множення, методом групування, винесенням спільного множника за дужки, методом виділення повного квадрату та ін.

Довідковий матеріал.

1.1. Формули скороченого множення $(a, b \in \mathbf{R})$:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

При перетворенні ірраціональних виразів часто користуються формулами:

$$a - b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right);$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right),\ a \geq 0, b \geq 0;$$
$$a \pm b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \pm \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}\right).$$

При спрощенні виразу $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ зручно (коли це можливо) подати $a + b\sqrt{c}$ у вигляді квадрата деякого двочлена.

1.2. Дії над степенями $(a > 0,\ b > 0;\ m, n \in \mathbf{Q})$

$$a^0 = 1;\ a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ a^m : a^n = a^{m-n};\ (ab)^m = a^m b^m;\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};\ (a^m)^n = a^{mn};\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

1.3. Дії над арифметичними коренями $(n, m \in \mathbf{N}, n, m \geq 2;\ a \geq 0;\ b \geq 0)$:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0;\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a};\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m};$$
$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}\ (0 \leq a < b);\ \sqrt{a^2} = |a|;\ \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$
$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a;\ \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

1.4. Абсолютна величина (модуль) числа a ($|a|$).

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases} \qquad (|-5| = -(-5) = 5)$$

$|ab| = |a| \cdot |b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \ne 0$; $|a+b| \le |a| + |b|$;

$|a-b| \le |a| + |b|$; $|a+b| \ge |a| - |b|$.

Зручно користуватись наступними властивостями модуля при розв'язанні рівнянь та нерівностей:

$\sqrt{a^2} = |a|$;

$|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \ge 0$;

$|a+b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < 0$;

$|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow (a-b)b \ge 0$;

$|a-b| > |a| - |b| \Leftrightarrow (a-b)b < 0$;

$|a| \le |b| \Leftrightarrow a^2 \le b^2$.

1.5. Властивості числових нерівностей:

1) Якщо $a > b$, то $b < a$.
2) Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.
3) Якщо $a > b$, то $a + c > b + c$, c - довільне.
4) Якщо $a > b$ і $n > 0$, то $an > bn$ і $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$; при $n < 0$, то $an < bn$ і $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$.
5) Якщо $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
6) Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.
7) Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a - d > b - c$.
8) Якщо $a > b > 0$ і $d > c > 0$ то $ad > bc$.
9) Якщо $a > b > 0$, то $a^n > b^n$, $n \in \mathbf{N}$.
10) Якщо $a > b > 0$, то $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$, $m \in \mathbf{N}$, $m \ge 2$.

Нерівності, які часто використовуються при доведенні інших нерівностей:

$a^2 \ge 0$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$, якщо $a \cdot b > 0$;

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \le -2$, якщо $a \cdot b < 0$;

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$ (нерівність Коші);

$ax^2 + bx + c > 0$ при всіх $x \in \mathbf{R}$, якщо $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$;

$ax^2 + bx + c < 0$ при всіх $x \in \mathbf{R}$, якщо $a < 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$.

Приклади

Приклад **1.1.**

Спростити вираз:

$$\left(\sqrt{a}+\frac{c-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{\sqrt{ac}-a}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}\right)^{-1}.$$

► Даний вираз існує при $a>0, c>0$ і $a\neq c$.

$$\left(\sqrt{a}+\frac{c-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{\sqrt{ac}-a}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{a+\sqrt{ac}+c-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{c})}+\frac{c}{\sqrt{a}(\sqrt{c}-\sqrt{a})}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{a+c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right)\cdot\left(\frac{a\sqrt{a}(\sqrt{c}-\sqrt{a})+c\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{c})-(c-a)(a+c)}{\sqrt{ac}(c-a)}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{a+c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{ac}(c-a)}{\sqrt{ac}(a+c)}=\frac{c-a}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=$$

$=\sqrt{c}-\sqrt{a}$, $c>0$, $a>0$, $a\neq c$. ◄

Приклад **1.2.**

Спростити вираз:

$$\left(\frac{3}{9-m^2}+\frac{2m-1}{m-3}-\frac{m^2-4}{m^2+6m+9}\cdot\frac{m+3}{m-2}\right):\frac{m}{m-3}.$$

► Вираз існує при $m\neq\pm3$, $m\neq0$, $m\neq2$.

$$\left(\frac{3}{9-m^2}+\frac{2m-1}{m-3}-\frac{m^2-4}{m^2+6m+9}\cdot\frac{m+3}{m-2}\right):\frac{m}{m-3}=$$

$$=\left(\frac{-3}{(m-3)(m+3)}+\frac{2m-1}{m-3}-\frac{(m-2)(m+2)}{(m+3)^2}\cdot\frac{m+3}{m-2}\right)\cdot\frac{m-3}{m}=$$

$$=\left(\frac{-3}{(m-3)(m+3)}+\frac{2m-1}{m-3}-\frac{m+2}{m+3}\right)\cdot\frac{m-3}{m}=$$

$$=\frac{-3+(2m-1)(m+3)-(m+2)(m-3)}{(m-3)(m+3)}\cdot\frac{m-3}{m}=$$

$$=\frac{-3+2m^2+6m-m-3-m^2+3m-2m+6}{m(m+3)}=$$

$=\dfrac{m^2+6m}{m(m+3)}=\dfrac{m+6}{m+3}$, $m\neq0$, $m\neq\pm3$, $m\neq2$. ◄

Приклад **1.3.**

Обчислити вираз при заданих значеннях параметрів $a = 4.91,\ b = 0.09$

$$\frac{(a^2-b^2)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}} : \frac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}}.$$

► Спочатку спростимо вираз

$$\frac{(a-b)(a+b)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{b}(a-b)+\sqrt{a}(a-b)}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}(a-\sqrt[3]{b})+\sqrt{a}(a-\sqrt[3]{b})}{a^3-b}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})}{(a-b)(\sqrt[3]{b}+\sqrt{a})}\cdot\frac{(a-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{b}+\sqrt{a})}{a^3-b}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b})(a-\sqrt[3]{b})}{(a^3-b)}=\frac{(a+b)(a^3-b)}{a^3-b}=a+b,$$

$$(a+b)\Big|_{\substack{a=4.91\\ b=0.09}}=5. \blacktriangleleft$$

Приклад **1.4.**

Спростити вираз:

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}\ .$$

► $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2}}}==\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}}}$

$$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\left|3-2\sqrt{5}\right|}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-(2\sqrt{5}-3)}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}+1}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}=1. \blacktriangleleft$$

Приклад **1.5.**

Порівняти числа:

а) A = $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ і B = 0,3;

б) A= $\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; B = $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

в) A= $\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ і B = $\sqrt{3}-1$;

►а) A= $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot2\sqrt{3}+2^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$;

Зробимо припущення, що A <B, тобто 2-$\sqrt{3}$< 0,3 звідки $\sqrt{3}$> 1,7 або 3 >2,89, тому припущення зроблено вірно і A < B.

б) Зробимо припущення: A > B: $\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}} > \sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ і, скориставшись властивостями числових нерівностей, будемо мати:

$\sqrt{5}+\sqrt{3} > \sqrt{6}+\sqrt{2}$,

$5+2\sqrt{15}+3>6+2\sqrt{12}+2$,

$2\sqrt{15}>2\sqrt{12}$,

15>12. Оскільки отримали вірну числову нерівність, то робимо висновок, що зроблене припущення вірне, тобто A>B.

в) $A=\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}+1}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{3}-1$. Отже, A=B.◄

Завдання для самостійної роботи

Спростити вирази (1-5):

1. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Відповідь:1

2. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\right)$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b}$.

3. $\left(\dfrac{x^2-2x+4}{4x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2+x}{x^3+8}-\dfrac{x+2}{2x^2-x}\right):\left(\dfrac{4}{x^2+2x}\right)-\dfrac{x+4}{3-6x}$

Відповідь: $-\dfrac{1}{3}$.

4. $\sqrt{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4x^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{x}+\dfrac{1}{2}}$

Відповідь: $\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0;4)$; $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x}}$, $x\in[4;+\infty)$.

5. $\dfrac{a^{4/3}-27\cdot a^{1/3}\cdot b}{a^{2/3}+3\sqrt[3]{ab}+9b^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-\sqrt[3]{a^2}$.

Відповідь: 0.

Порівняти числа (6-7):

6. A = $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$; B = $\sqrt{2}+2$.

Відповідь A < B.

7. $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}+1$; B=$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Відповідь : A > B.

2. РАЦІОНАЛЬНІ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ОДНИМ НЕВІДОМИМ

2.1. Основні означення

Областю визначення (ОДЗ) рівняння $f(x) = q(x)$ (нерівності $f(x) < q(x)$) називається множина $D_f \cap D_q$, де D_f і D_q – області визначення відповідно функції $f(x)$ і $q(x)$.

Число x_0 називається коренем рівняння $f(x) = q(x)$, якщо при підстановці його замість x в рівняння одержуємо вірну числову рівність $f(x_0) = q(x_0)$.

Розв'язком нерівності $f(x) < q(x)$ є множина всіх значень $x \in D_f \cap D_q$ (множина розв'язків), які при підстановці в цю нерівність дають вірну числову нерівність.

Якщо в двох рівняннях $f_1(x) = q_1(x)$ *і* $f_2(x) = q_2(x)$ збігаються множини всіх їх розв'язків або обидва вони розв'язків не мають, то такі рівняння називаються рівносильними (аналогічне означення рівносильності двох нерівностей $f_1(x) < q_1(x)$ *і* $f_2(x) < q_2(x)$). При цьому пишуть: $f_1(x) = q_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = q_2(x)$, $(f_1(x) < q_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < q_2(x))$

Рівносильний перехід - це заміна рівняння його рівносильним рівнянням або рівносильною сукупністю (системою) рівнянь (нерівностей).

Якщо для даної пари рівнянь довільний корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння є наслідком першого (аналогічно визначається нерівність, яка є наслідком першої нерівності).

При цьому пишуть:

$f_1(x) = q_1(x) \Rightarrow f_2(x) = q_2(x)$

$(f_1(x) < q_1(x) \Rightarrow f_2(x) < q_2(x))$.

Якщо замінити рівняння (нерівність) його наслідком, то множина розв'язків другого рівняння (нерівності) може мати сторонні корені, які треба вилучити, наприклад, шляхом перевірки (провести дослідження у випадку з нерівностями, яке дозволить з отриманої множини значень вибрати ті із них, які є розв'язками вихідної нерівності).

2.2. Найпростіші твердження про рівносильність і наслідок рівнянь

($f(x), q(x)$ – деякі функції, $n \in \mathbf{N}$):

- $f(x) = q(x) \Leftrightarrow f(x) - q(x) = 0.$
- $f(x) = q(x) \Leftrightarrow f(x) + \alpha = q(x) + \alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}.$
- $f(x) = q(x) \Leftrightarrow \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot q(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\alpha} = \dfrac{q(x)}{\alpha},\ \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 0.$
- $f(x) \cdot q(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ q(x) = 0. \end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{q(x)} = p(x) \Rightarrow f(x) = p(x) \cdot q(x).$
- $f(x) + p(x) = q(x) + p(x) \Rightarrow f(x) = q(x).$

- $f(x)=q(x)\Rightarrow f^{2n}(x)=q^{2n}(x),\ n\in\mathbf{N}.$
- $f(x)=q(x)\Leftrightarrow f^{n}(x)=q^{n}(x),$ якщо $f(x)\ge 0, q(x)\ge 0, x\in A, n\in\mathbf{N}$, (А – деяка множина)
- $f(x)=q(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot p(x)=q(x)\cdot p(x),$ якщо $y=p(x)$ визначена і не є нулем ні в одній точці деякої множини $A\subset D_f\cap D_q$ (може бути, що $A=D_f\cap D_q$).

2.3. Найпростіші твердження про рівносильність і наслідок нерівностей:

- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow q(x)>f(x).$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow f(x)-q(x)<0.$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow f(x)+\alpha<q(x)+\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}.$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow \alpha\cdot f(x)<\alpha\cdot q(x)\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\alpha}<\dfrac{q(x)}{\alpha},\ \alpha>0,\ \alpha\in\mathbf{R}.$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow \alpha\cdot f(x)>\alpha\cdot q(x)\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\alpha}>\dfrac{q(x)}{\alpha},\ \alpha<0,\ \alpha\in\mathbf{R}.$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow f(x)+p(x)<q(x)+p(x),$ якщо $D_f\cap D_q\subset D_p$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot p(x)<q(x)\cdot p(x),$ якщо на $D_f\cap D_q$ $p(x)>0.$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot p(x)>q(x)\cdot p(x),$ якщо на $D_f\cap D_q$ $p(x)<0.$
- $f(x)<q(x)\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{q(x)}$, якщо на $D_f\cap D_q$ $f(x)>0,\ q(x)>0.$
- $\dfrac{f(x)}{q(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot q(x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0,\\ q(x)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0,\\ q(x)<0.\end{cases}\end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{q(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot q(x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>0,\\ q(x)<0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0,\\ q(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{q(x)}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\cdot q(x)\ge 0\\ q(x)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ q(x)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ q(x)<0.\end{cases}\end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{q(x)}\le 0\Leftrightarrow \begin{cases}f(x)\cdot q(x)\le 0\\ q(x)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ q(x)<0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ q(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$
- $f(x)\cdot q(x)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ q(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ q(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$ $\quad f(x)\cdot q(x)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ q(x)\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ q(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$

- $f^{2n}(x)\cdot q(x) > 0 \Leftrightarrow |f(x)|\cdot q(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q(x) > 0, \\ f(x) \neq 0, \\ x \in D_f \cap D_q. \end{cases}$
- $f^{2n}(x)\cdot q(x) \geq 0 \Leftrightarrow |f(x)|\cdot q(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q(x) \geq 0, \\ f(x) = 0, \end{array}\right. \\ x \in D_f \cap D_q. \end{cases}$
- $f^{2n}(x)\cdot q(x) < 0 \Leftrightarrow |f(x)|\cdot q(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q(x) < 0, \\ f(x) \neq 0, \\ x \in D_f \cap D_q. \end{cases}$
- $f^{2n}(x)\cdot q(x) \leq 0 \Leftrightarrow |f(x)|\cdot q(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q(x) \leq 0, \\ f(x) = 0, \end{array}\right. \\ x \in D_f \cap D_q. \end{cases}$
- $f(x) < q(x) \Leftrightarrow f^n(x) < q^n(x),\ n \in \mathbf{N}$ на множині А, якщо $f(x) \geq 0,\ q(x) \geq 0$ на А.
- $f(x) < q(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) < q^{2n+1}(x),\ n \in \mathbf{N}.$
- $f(x) + p(x) < q(x) + p(x) \Rightarrow f(x) < q(x).$

2.4. Основні типи рівнянь та способи їх розв'язку.

2.4.1. Повне квадратне рівняння:

$ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c \in \mathbf{R},\ a \neq 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ – формули коренів рівняння;

$D = b^2 - 4ac$ – дискримінант квадратного рівняння;

(Якщо $D > 0$, то $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, якщо $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$; якщо $D < 0$, то дійсних коренів квадратне рівняння не має);

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0.$

2.4.2. Зведене квадратне рівняння:

$x^2 + px + q = 0,\ p,q \in \mathbf{R}$

$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$ – формула коренів рівняння;

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),\ x_1, x_2$ – корені рівняння.

Теорема Вієта: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$, де x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$;

Теорема Вієта для повного квадратного рівняння:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$, де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0.$

2.4.3. Тричленне рівняння:
$ax^{2n}+bx^n+c=0,\ a,b,c\in\mathbf{R},\ a\neq 0, n\geq 2.$

Рівняння зводиться до квадратного рівняння заміною $x^n=t.$

При n = 2 маємо рівняння $ax^4+bx^2+c=0,$ яке називається біквадратним.

2.4.4. Зворотне (симетричне) рівняння:
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,\ a,b,c,d,e\in\mathbf{R},\ ae\neq 0.$

Якщо виконана умова $\frac{e}{a}=\frac{d^2}{b^2}$, то після ділення обох частин рівняння на $x^2\neq 0$ будемо мати: $a\left(x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0;$ після заміни $x+\frac{d}{bx}=t$ це рівняння зведеться до квадратного.

2.4.5. Рівняння вигляду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=A,\ a,b,c,d,A\in\mathbf{R}$, для якого виконана умова $a+b=c+d$. Після згрупування співмножників будемо мати $(x^2+(a+b)x+ab)(x^2+(c+d)x+cd)=A,$, а заміна $x^2+(a+b)x=t$, зведе дане рівняння до квадратного.

2.4.6. Рівняння вигляду $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=Ax^2,\ a,b,c,d,A\in\mathbf{R}$, для якого виконана умова $ab=cd$.

Після згрупування співмножників
$(x^2+(a+b)x+ab)(x^2+(c+d)x+cd)=Ax^2,$ і ділення обох частин рівняння на $x^2\neq 0$ будемо мати:

$$\left(x+(a+b)+\frac{ab}{x}\right)\cdot\left(x+(c+d)+\frac{cd}{x}\right)=A.$$

Заміна $x+\frac{ab}{x}=t$ зводить останнє рівняння до квадратного.

2.4.7. Однорідне рівняння:
$af^2(x)+bf(x)q(x)+cq(x)=0,\ a,b,c\in\mathbf{R}..$

Після ділення обох частин рівняння на $q^2(x)\neq 0$ або $f^2(x)\neq 0$ і заміни $\frac{f(x)}{q(x)}=t$ або $\frac{q(x)}{f(x)}=t$ воно зводиться до квадратного.

2.4.8. Рівняння вигляду:
$(x-a)^4+(x-b)^4=A,\ (a,b,A\in\mathbf{R}).$

Замінимо $t=x-\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow x=t+\frac{a+b}{2}$ рівняння зводиться до біквадратного рівняння відносно t.

2.4.9. Рівняння вигляду $\frac{ax}{px^2+q_1x+r}+\frac{bx}{px^2+q_2x+r}=c,\ (c\neq 0)$

Чисельник і знаменник кожного дробу треба поділити на $x \neq 0$: $\frac{a}{px + q_1 + \frac{r}{x}} + \frac{b}{px + q_2 + \frac{r}{x}} = c$ і зробити заміну $px + \frac{r}{x} = t$. Рівняння зведеться до квадратного.

2.4.10. Рівняння, які містять знак абсолютної величини

• $|f(x)| = A,\ A > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = A, \\ f(x) = -A; \end{array}\right.$

• $|f(x)| = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} q(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = q(x), \\ f(x) = -q(x); \end{array}\right. \end{cases}$

• $|f(x)| + |q(x)| = |f(x) + q(x)| \Leftrightarrow f(x) \cdot q(x) \geq 0;$

• $|f(x)| = |q(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = q\ (x), \\ f(x) = -q(x), \end{array}\right. \Leftrightarrow f^2(x) = q^2(x);$

• $f(|x|) = q(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ f(x) = q(x), \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ f(-x) = q(x); \end{cases} \end{array}\right.$

• $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_n(x)| = q(x),\ f_i(x),\ i = \overline{1,n},\ q(x)$ – деякі функції. Такі рівняння найпростіше розв'язувати методом інтервалів.

Для цього знаходимо усі значення незалежної змінної x, при яких $f_i(x),\ i = \overline{1,n}$ змінює знак і розташовуємо точки на осі. Вони поділяють область допустимих значень рівняння на проміжки, на кожному з яких функції $f_i(x),\ i = \overline{1,n}$ зберігають знак. Визначаємо знаки виразів $f_i(x),\ i = \overline{1,n}$ на кожному з утворених проміжків. На кожному з таких проміжків початковому рівнянню ставимо у відповідність рівносильне рівняння разом із нерівністю, яка задає проміжок, який розглядається (тобто маємо систему).

Точки розбиття (корені рівняння $f_i(x) = 0,\ i = \overline{1,n}$), якщо вони належать області визначення, потрібно обов'язково включати в один із розглядуваних проміжків.

Аналогічні міркування можна провести і для нерівностей вигляду $|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \cdots \pm |f_n(x)| \geq q(x).$

2.4.11. Ірраціональні рівняння

В ірраціональному рівнянні (рівнянні, яке містить змінну величину під знаком кореня) всі корені парного степеня, що входить до нього, є арифметичними, тому корінь парного степеня існує лише при невід'ємних значеннях підкореневого виразу і набуває невід'ємних значень. Всі корені непарного степеня визначені при довільному значенні підкореневого виразу і знак такого кореня співпадає із знаком підкореневого виразу.

Основні формули, які застосовують при розв'язанні ірраціональних рівнянь:

- $\sqrt[2n+1]{a} < 0$, якщо $a < 0$; $\sqrt[2n+1]{a} = 0,$ якщо $a = 0;$ $\sqrt[2n+1]{a} > 0$, якщо $a > 0$;
- $\sqrt[2n]{a}$ не існує, якщо $a < 0;$ $\sqrt[2n]{a} = 0$, якщо $a = 0$; $\sqrt[2n]{a} > 0,$ при $a > 0.$

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - деякі функції, $a \in \mathbf{R}$ тоді

- $\sqrt[2n+1]{uv} = \sqrt[2n+1]{u} \cdot \sqrt[2n+1]{v};$ $\sqrt[2n+1]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[2n+1]{u}}{\sqrt[2n+1]{v}},\ v \neq 0;$
- $\sqrt[2n]{uv} = \sqrt[2n]{u} \cdot \sqrt[2n]{v},\ u \geq 0,\ v \geq 0;$ $\sqrt[2n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[2n]{u}}{\sqrt[2n]{v}},\ u \geq 0, v > 0;$
- $\sqrt[2n]{uv} = \sqrt[2n]{|u|} \cdot \sqrt[2n]{|v|},\ uv \geq 0;$ $\sqrt[2n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[2n]{|u|}}{\sqrt[2n]{|v|}},\ uv \geq 0,\ v \neq 0;$
- $u \cdot \sqrt[2n+1]{v} = \sqrt[2n+1]{u^{2n+1} \cdot v};$
- $u \cdot \sqrt[2n]{v} = \pm\sqrt[2n]{u^{2n}v},$ «+», якщо $u \geq 0$ і «-», якщо $u < 0;$
- $\sqrt[2n+1]{u^{2n+1}} = u;$ $\sqrt[2n]{u^{2n}} = |u|$.

Основні типи ірраціональних рівнянь:

- $\sqrt[2n+1]{f(x)} = q(x) \Leftrightarrow f(x) = q^{2n+1}(x);$
- $\sqrt[2n]{f(x)} = q(x) \Rightarrow f(x) = q^{2n}(x);$ (тоді перевірка обов'язкова) або

$$\sqrt[2n]{f(x)} = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} q(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) = (q(x))^{2n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q(x) \geq 0, \\ f(x) = (q(x))^{2n}. \end{cases}$$

- $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = q(x), \\ q(x) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = q(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$
- $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = 0, \end{cases} \\ g(x) = 0. \end{array} \right.$
- $\sqrt[n]{ax + b} + \sqrt[m]{cx + d} = A,\ (m, n \in \mathbf{N};\ a, b, c, d, A \in \mathbf{R}).$

При розв'язанні рівнянь такого типу зручно скористатись заміною $\begin{cases} \sqrt[n]{ax + b} = u, \\ \sqrt[m]{cx + d} = v, \end{cases}$ (при *n і m* парних буде $u \geq 0$ і $v \geq 0$). Звідки $\begin{cases} ax + b = u^n \\ cx + d = v^m \end{cases}$.

Якщо виключити із системи змінну x, будемо мати: $c \cdot u^n - a \cdot v^m = c \cdot b - a \cdot d.$

Тепер маємо систему $\begin{cases} u + v = A \\ c \cdot u^n - a \cdot v^m = c \cdot b - a \cdot d, \end{cases}$

із якої знаходимо u і v (з урахуванням обмежень накладених на u і v) і далі x за одним із виразів: $x=\frac{u^n}{a}-\frac{b}{a}$ або $x=\frac{v^m}{c}-\frac{d}{c}$.

- $\sqrt{a(x)} \pm \sqrt{q(x)} = p(x)$.

В залежності від вигляду функцій *f(x), q(x)* *p(x)* залежить шлях розв'язання таких рівнянь.

Можна скористатись наступним алгоритмом:

a) знайти ОДЗ вихідного рівняння;

b) перейти від рівняння до його наслідку (піднести до квадрату обидві частини рівняння);

c) знайти корені одержаного рівняння;

d) знайдені корені, які належать ОДЗ, перевірити підстановкою у вихідне рівняння.

Отже, ірраціональні рівняння зводяться до відповідних раціональних рівнянь, які рівносильні вихідним або є їх наслідкам. Таке зведення проводиться в основному піднесенням обох частин рівняння до відповідного степеня.

- $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{q(x)} = p(x)$.

При розв'язанні таких рівнянь використовуємо формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$:

$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{q(x)} = p(x) \Leftrightarrow f(x)+3\sqrt[3]{f(x)q(x)}(\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{q(x)})+q(x)=p^3(x)$ звідки маємо $q(x)+f(x)+3\sqrt[3]{f(x)q(x)}\cdot p(x)=p^3(x) \Leftrightarrow 27f(x)q(x)p^3(x)=(p^3(x)-f(x)-q(x))^3$.

Знайдені корені останнього рівняння необхідно перевірити підстановкою у вихідне рівняння.

Зауваження: дане рівняння можна розв'язати і за допомогою заміни $\sqrt[3]{f(x)}=u,\ \sqrt[3]{q(x)}=v$.

2.5. Основні типи нерівностей та способи їх розв'язування

Нерівності вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \left(\frac{P(x)}{Q(x)}<0\right)$, де $P(x)$ і $Q(x)\neq 0$ деякі многочлени, називаються раціональними нерівностями.

2.5.1. $P_n(x)>0\ (P_n(x)<0)$, де $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

При розв'язанні таких нерівностей потрібно використати наступну схему:

a) розв'язати рівняння $P_n(x)=0$,

b) розкласти ліву частину нерівності на найпростіші множники,

c) поділити обидві частини нерівності на вирази, які не змінюють свого знаку (наприклад, x^2+px+q, де $p^2-4q<0$),

d) застосувати метод інтервалів до одержаної нерівності $a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_i)^{k_i}>0\ (<0)$ (нагадаємо цей метод на прикладах, які розглянемо далі).

2.5.2. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0,\ (<0)$, де $P(x)$ і $Q(x)\neq 0$ деякі многочлени.

Схема розв'язування:

a) розкласти $P(x)$ і $Q(x)$ на найпростіші множники;
b) застосувати метод інтервалів.

2.5.3. Нерівності, які містять знак модуля

- $|f(x)|\le q(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le q(x),\\ f(x)\ge -q(x).\end{cases}$
- $|f(x)|\ge q(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)\ge q(x),\\ f(x)\le -q(x).\end{array}\right.$
- $|f(x)|\le|q(x)|\Leftrightarrow f^2(x)\le q^2(x).$
- $|f(x)+q(x)|<|f(x)|+|q(x)|\Leftrightarrow f(x)\cdot q(x)<0.$
- $|f(x)-q(x)|>|f(x)|-|q(x)|\Leftrightarrow (f(x)-q(x))\cdot q(x)<0.$
- $|f(x)|\ge C,\ C>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)\ge C,\\ f(x)\le -C.\end{array}\right.$
- $|f(x)|\ge C,\ C\le 0\Leftrightarrow x\in D_f$.
- $|f(x)|\le C,\ C>0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le C,\\ f(x)\ge -C.\end{cases}$

2.5.4. Ірраціональні нерівності

- $\sqrt[2n]{f(x)}<q(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ q(x)>0,\\ f(x)<q^{2n}(x).\end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)}\le q(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ q(x)\ge 0,\\ f(x)\le q^{2n}(x).\end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)}>q(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}q(x)\ge 0,\\ f(x)>q^{2n}(x),\end{cases}\\ \begin{cases}q(x)<0,\\ f(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$

- $\sqrt[2n]{f(x)} \ge q(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q(x) \ge 0, \\ f(x) \ge q^{2n}(x), \end{cases} \\ \begin{cases} q(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} < q(x) \Leftrightarrow f(x) < q^{2n+1}(x);\ \ \sqrt[2n+1]{f(x)} > q(x) \Leftrightarrow f(x) > q^{2n+1}(x)$.
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \le q(x) \Leftrightarrow f(x) \le q^{2n+1}(x);\ \ \sqrt[2n+1]{f(x)} \ge q(x) \Leftrightarrow f(x) \ge q^{2n+1}(x)$.
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{q(x)} \Leftrightarrow f(x) < q(x).$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot q(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ q(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D_q. \end{cases} \end{array}\right.$ $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot q(x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ q(x) \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D_q. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{q(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ q(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ q(x) \ne 0. \end{cases} \end{array}\right.$ $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{q(x)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ q(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ q(x) \ne 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{q(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ q(x) > 0. \end{cases}$ $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{q(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ q(x) < 0. \end{cases}$
- $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < q(x). \end{cases}.$

Приклади

Розв'язати рівняння (2.1. – 2.27.):

Приклад **2.1.** $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

► Виконаємо заміну $x^2 = t,\ t \ge 0.$ Маємо $t^2 - 5t + 6 = 0,\ t_1 = 2,\ t_2 = 3.$ Звідки $x_{1,2} = \pm\sqrt{2},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. ◄

Приклад **2.2.** $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$

► Розкладемо на множники ліву частину рівняння $x^3 - 3x^2 - x + 3 = x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x - 3).$ Звідки маємо $(x-1)(x+1)(x-3) = 0$ і остаточно: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3.$ ◄

Приклад **2.3.** $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0.$

► Цілі корені шукаємо серед дільників вільного члена рівняння, тобто серед $\pm 1, \pm 2.$ Перевіривши ці числа, маємо $x = -1.$ Ділимо $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ на $x + 1$, маємо $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+1)(x^2 + 2x + 2).$ Рівняння $x^2 + 2x + 2$ має від'ємний дискримінант, тому вихідне рівняння має один дійсний корінь $x = -1.$ ◄

Приклад **2.4.** $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0.$

► Оскільки $\frac{4}{1} = \frac{2^2}{(-1)^2}$, то дане рівняння є зворотнім. Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$: $x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0.$ Перепишемо $(x^2 + \frac{4}{x^2}) - (x - \frac{2}{x}) - 10 = 0.$ Зробимо заміну $x - \frac{2}{x} = t,$ звідки $t^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4,$ тоді вихідне рівняння буде мати вигляд $t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 3,\ t_2 = -2.$ Отримали сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} x - \frac{2}{x} = 3 \\ x - \frac{2}{x} = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2 - 3x - 2}{x} = 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 2}{x} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}.$ ◄

Приклад **2.5.** $\frac{x^2 - 6x - 9}{x} = \frac{x^2 - 4x - 9}{x^2 - 6x - 9}.$

► Область визначення даного рівняння $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 3 \pm 3\sqrt{2}\}.$ Розділимо чисельник і знаменник кожного дробу на $x \neq 0$: $\frac{x - 6 - 9/x}{1} = \frac{x - 4 - 9/x}{x - 6 - 9/x}.$ Зробимо заміну $x - \frac{9}{x} = t,$ тоді будемо мати рівняння:

$t - 6 = \frac{t - 4}{t - 6} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 13t + 40}{t - 6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 6 \\ t^2 - 13t + 40 = 0 \end{cases}$ звідки $t_1 = 8,\ t_2 = 5.$ Повертаємось до змінної x: $\left[\begin{array}{l} x - 9/x = 8 \\ x - 9/x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2 - 8x - 9}{x} = 0 \\ \frac{x^2 - 5x - 9}{x} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_{3,4} = (5 \pm \sqrt{61})/2. \end{array}\right.$ ◄

Приклад **2.6.** $\frac{x}{2x^2 + 12x + 10} + \frac{3x + 1}{4x^2 + 16x - 20} - \frac{x + 34}{x^3 + 5x^2 - x - 5} = 0$**.**

► Область визначення даного рівняння $x \in \mathbf{R} \setminus \{-5; -1; 1\}.$ Розкладемо на множники знаменники дробів,які входять у рівняння

$$\frac{x}{2(x+5)(x+1)} + \frac{3x+1}{4(x+5)(x-1)} - \frac{x+34}{(x^2-1)(x+5)} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2x(x-1) + (3x+1)(x+1) - 4(x+34)}{4(x^2-1)(x+5)} = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 2x - 135 = 0 \\ 4(x^2-1)(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{27/5; -5\} \\ 4(x^2-1)(x+5) \neq 0 \end{cases}$ звідки $x = 27/5$.◄

Приклад **2.7.** $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 105.$

► Оскільки 1+7=3+5, рівняння перепишемо так: $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = 105.$ Виконаємо заміну : $x^2 + 8x + 7 = t,$ тоді $x^2 + 8x + 15 = t + 8,$ звідки одержимо: $t(t+8) = 105$ або $t^2 + 8t - 105 = 0$, тоді

$t_1=-15,\ t_2=7.$ Отже, маємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+8x+7=-15 \\ x^2+8x+7=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+8x+22=0 \\ x^2+8x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x(x+8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-8 \end{array}\right. .\ ◄$$

Приклад **2.8.** $(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)=30x^2.$

► Оскільки $2\cdot 6=3\cdot 4$, рівняння перепишемо у вигляді: $(x^2+8x+12)(x^2+7x+12)=30x^2.$ Поділимо праву і ліву частини рівняння на $x^2\neq 0$: $(x+8+12/x)(x+7+12/x)=30.$ Введемо заміну $x+\dfrac{12}{x}=t,$ тоді будемо мати рівняння $(t+8)(t+7)=30 \Leftrightarrow t^2+15t+26-0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-13 \\ t_2=-2 \end{array}\right. .$

Далі маємо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} x+12/x=-13 \\ x+12/x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+13x+12}{x}=0 \\ \dfrac{x^2+2x+12}{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-12 \\ x_2=-1 \end{array}\right. .$

Приклад **2.9.** $4x^2+\left(\dfrac{4x}{x+2}\right)^2=20.$

► Оскільки ліва частина рівняння є сумою квадратів двох виразів, застосуємо формулу $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab,$ маємо:

$$\left(2x-\frac{4x}{x+2}\right)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{4x}{x+2}=20 \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x+2}\right)^2+8\cdot\frac{2x^2}{x+2}=20.$$

Введемо заміну $\dfrac{2x^2}{x+2}=t,$ звідки $t^2+8t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-10 \\ t_2=2 \end{array}\right. .$ Отже, маємо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^2}{x+2}=-10 \\ \dfrac{2x^2}{x+2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x^2+10x+20}{x+2}=0 \\ \dfrac{2x^2-2x-4}{x+2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{array}\right. .$ ◄

Приклад **2.10.** $\left(\dfrac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\dfrac{5x}{4-x^2}\right)^2$**.**

► Дане рівняння рівносильне наступному рівнянню $\left|\dfrac{x^2+6}{x^2-4}\right|=\left|\dfrac{5x}{4-x^2}\right|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2+6|=|5x| \\ x\neq\pm 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+5x+6=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right. \\ x\neq\pm 2 \end{cases}$$ звідки $x\in\{-3;3\}$. ◄

Приклад **2.11.** $(x-3)^4+(x+1)^4=32.$

► Зробимо наступні перетворення:

$$((x-3)^2-(x+1)^2)^2+2((x-3)(x+1))^2=32 \Leftrightarrow (-8x+8)^2+2(x^2-2x-3)^2=32 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 64(x-1)^2+2((x-1)^2-4)^2=32.$$

Введемо заміну $(x-1)^2=t,\ t\geq 0,$ тоді $32t+(t-4)^2=16 \Leftrightarrow t^2+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=0 \\ t_2=-24 \end{array}\right.$.

Отже, маємо $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$ ◄

Приклад **2.12.** $x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=4$**.**

► Рівняння має зміст, коли $x\neq 0$. Зробимо заміну $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$**,** тоді маємо рівняння $t^2+t-2=4 \Leftrightarrow t\in\{-3;2\}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1/x=-3 \\ x+1/x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};1\right\}$.◄

Приклад **2.13.** $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$**.**

► Рівняння має зміст, коли $x\notin\{-4;-2;-1;1\}$. В знаменнику розкриємо дужки, зробимо заміну $x^2+3x=t$, тоді рівняння матиме вигляд $\frac{6}{t+2}+\frac{8}{t-4}-1=0$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t^2+16t=0 \\ t\notin\{-2;4\} \end{array}\right. \Leftrightarrow t\in\{-16;0\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x=0 \\ x^2+3x+16=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-3;0\}$ **.**◄

Приклад **2.14.** $|x^2+3x-1|=|2x-1|.$

► Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x-1=2x-1 \\ x^2+3x-1=-2x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=0 \\ x^2+5x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x_1=0 \\ x_2=-1 \\ x_{3,4}=(-5\pm\sqrt{33})/2 \end{array}\right. . ◄$$

Приклад **2.15.** $|x^2+4x|+3x+2=|x+2|.$

► Знайдемо значення x, при яких вирази під знаком модуля обертаються на нуль: $x=0,\ x=-4,\ x=-2.$ Ці числа поділяють всю числову вісь на інтервали: $x\in(-\infty;-4],$ $x\in(-4;-2],$ $x\in(-2;0],$ $x\in(0;+\infty).$ Розв'яжемо дане рівняння в кожному інтервалі (перевіряємо знак виразів під модулем в інтервалі, який розглядаємо, і відповідно розкриваємо модуль). Будемо мати сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4x+3x+2=-x-2,\ \ (x\in(-\infty;-4]) \\ -x^2-4x+3x+2=-x-2,\ \ (x\in(-4;-2]) \\ -x^2-4x+3x+2=x+2,\ \ (x\in(-2;0]) \\ x^2+4x+3x+2=x+2,\ \ (x\in(0;+\infty)) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+8x+4=0,\ \ (x\in(-\infty;-4]) \\ x^2-4=0,\ \ (x\in(-4;-2]) \\ x^2+2x=0,\ \ (x\in(-2;0]) \\ x^2+6x=0,\ \ (x\in(0;+\infty)) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4-2\sqrt{3} \\ x_2=-2 \\ x_3=0 \end{array}\right. .$$

Приклад **2.16.** $|1-x|-|x+2|=|x+3|$.

► Знайдемо всі значення змінної x, при яких вирази, що знаходяться під знаком модуля, обертаються на нуль: $x=1,\ x=-2,\ x=-3.$ Ці точки поділяють всю числову вісь на інтервали: $x\in(-\infty;-3],\ x\in(-3;-2],\ x\in(-2;1],\ x\in(1;+\infty).$ Розв'язуємо дане рівняння в кожному інтервалі (розкриваємо модуль в залежності від того, який знак приймає вираз під модулем в даному інтервалі), тобто маємо сукупність систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in(-\infty;-3] \\ 1-x+x+2=-x-3\end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-3;-2] \\ 1-x+x+2=x+3\end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-2;1] \\ 1-x-x-2=x+3\end{cases} \\ \begin{cases} x\in(1;+\infty) \\ -1+x-x-2=x+3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x\in\varnothing \\ x=-4/3 \\ x=-6\end{array}\right., \text{ звідки } \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-4/3.\end{array}\right. ◄$$

Приклад **2.17.** $(x+2)^2=2|x+2|+3$.

► Дане рівняння рівносильне рівнянню $|x+2|^2=2|x+2|+3$. Зробимо заміну $|x+2|=t\ge 0$, тоді $t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t\in\{-1;3\} \\ t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow |x+2|=3 \Leftrightarrow x\in\{-5;1\}$.◄

Приклад **2. 18.** $x|x|+8x-7=0$.

► $x|x|+8x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 0: x^2+8x-7=0, \\ x<0: x^2-8x-7=0\end{array}\right.$ звідки $x=-4+\sqrt{23}$.◄

Приклад **2.19.** $\dfrac{|x^2-x-2|}{x+1}=3$.

► Рівняння має зміст, коли $x\ne -1$. Розглянемо два випадки: коли вираз під модулем невід'ємний та від'ємний 1) $x\in(-\infty;-1)\cup[2;+\infty): \dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}=3$ $\Leftrightarrow x=5$;

2) $x\in(-1;2)$: $-\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+1}=3 \Leftrightarrow x\in\varnothing$. Тому остаточна відповідь $x=5$.◄

Приклад **2.20.** $\big|x|x-1|-2x\big|=x^2-2$.

► Рівняння має зміст, коли права його частина невід'ємна, тобто $x\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)$. $\big|x|x-1|-2x\big|=x^2-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x|x-1|-2x=x^2-2 \\ x|x-1|-2x=-x^2+2\end{array}\right.$. Тоді матимемо

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c}x\ge\sqrt{2}\\ \left[\begin{array}{l}x(x-1)-2x=x^2-2\\ x(x-1)-2x=-x^2+2\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{c}x\le-\sqrt{2}\\ \left[\begin{array}{l}-x(x-1)-2x=x^2-2\\ -x(x-1)-2x=-x^2+2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c}x\ge\sqrt{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=2/3\\ x\in\{-1/2;2\}\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{c}x\le-\sqrt{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=\left(-1\pm\sqrt{17}\right)/4\\ x=-2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$ звідки $x\in\{-2;2\}$. ◄

Приклад **2.21.** $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}=1.$

► Введемо заміну $\sqrt{x+2}=t,\ t\ge 0,$ тоді $x+2=t^2\Rightarrow x=t^2-2.$ Підставимо одержані вирази у рівняння:

$\sqrt{t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-6t+9}=1\Leftrightarrow\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=1\Leftrightarrow|(t-2)|+|(t-3)|=1.$

Дане рівняння рівносильне нерівності

$(t-2)(3-t)\ge 0\Leftrightarrow(t-2)(t-3)\le 0\Leftrightarrow t\in[2;3]$ (До отриманого рівняння можна було б застосувати і метод інтервалів). Звідки

$2\le\sqrt{x-1}\le 3\Leftrightarrow 4\le x-1\le 9\Leftrightarrow x\in[5;10].$ ◄

Приклад **2.22.** $\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{(2x-1)^3}.$

► ОДЗ рівняння $2x-1>0\Leftrightarrow x>1/2.$ Помножимо обидві частини рівняння на $\sqrt{2x-1}$. Будемо мати $3x-2=(2x-1)^2$ або $4x^2-7x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3/4.\end{array}\right.$ Обидва корені належать ОДЗ вихідного рівняння і підстановкою переконаємось, що вони є і коренями заданого рівняння. ◄

Приклад **2.23.** $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8.$

► ОДЗ рівняння: $x\ge 0.$ Покладемо $u=\sqrt[3]{76+\sqrt{x}},\ v=\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}$ і будемо мати симетричну систему рівнянь

$\begin{cases}u+v=8\\ u^3+v^3=152\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=8\\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=152\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=8-v\\ u^2-uv+v^2=19.\end{cases}$ Розв’язавши цю систему, маємо $\begin{cases}u_1=3\\ v_1=5\end{cases}$ і $\begin{cases}u_2=5\\ v_2=3.\end{cases}$

Отже, вихідне рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}=3\\ \sqrt[3]{76+\sqrt{x}}=5.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}76+\sqrt{x}=27\\ 76+\sqrt{x}=125\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ x=2401\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2401.$ ◄

Приклад **2.24.** $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

► Піднесемо до куба обидві частини рівняння, використавши формулу $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$: $x+34-x+3-3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}(\sqrt[3]{(x+34)}-\sqrt[3]{x-3})=1.$ Замінимо $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}$ на 1 (із умови), будемо мати:

$$36=3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\Leftrightarrow 12=\sqrt[3]{x^2+31x-102}\Leftrightarrow 1728=x^2+31x-102$$

$$\Leftrightarrow x^2+31x-1830=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-61\\ x=30.\end{array}\right.$$ ◄

Приклад **2.25.** $5x-2+2\sqrt{4x^2+9x+2}=4(\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}).$

► Позначимо $\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=t,\ t>0$, звідки $x+2+2\sqrt{4x^2+9x+2}+4x+1=t^2$ $\Leftrightarrow 5x+2\sqrt{4x^2+9x+2}=t^2-3.$ Підставимо одержане у вихідне рівняння: $t^2-3-2=4t\Leftrightarrow t^2-4t-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5\\ t=-1.\end{array}\right.$ Оскільки $t>0$, маємо один корінь $t=5.$ Отже, вихідне рівняння рівносильне

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=5\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=5-\sqrt{4x+1}\Rightarrow x+2=25-10\sqrt{4x+1}+4x+1\Rightarrow$$

$$100(4x+1)=9x^2+144x+576\Leftrightarrow 9x^2-256x+476=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=238/9\\ x_2=2.\end{array}\right.$$

Підстановкою в рівняння переконаємось, що число 2 є коренем, а 238/9 – зайвий корінь.

Приклад **2.26.** $x+5-\sqrt{\dfrac{x+5}{x-3}}=\dfrac{6}{x-3}.$

► ОДЗ даного рівняння буде: $x\in(-\infty;-5]\cup(3;+\infty).$ Відмітимо, що $x-3\neq 0,$ і помножимо обидві частини рівняння на $x-3$: $x^2+2x-15-(x-3)\cdot\sqrt{\dfrac{x+5}{x-3}}=6,$ тоді

$$x+5-\sqrt{\frac{x+5}{x-3}}=\frac{6}{x-3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3<0\\ x^2+2x-15+\sqrt{x^2+2x-15}-6=0\end{cases}\\ \begin{cases} x-3>0\\ x^2+2x-15-\sqrt{x^2+2x-15}-6=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Позначимо $\sqrt{x^2+2x-15}=t,$ тоді

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3<0\ (\sqrt{x^2+2x-15}=t,t\geq 0)\\ t^2+t-6=0\end{cases}\\ \begin{cases} x-3>0\ (\sqrt{x^2+2x-15}=t,t\geq 0)\\ t^2-t-6=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3<0\ (\sqrt{x^2+2x-15}=t,t\geq 0)\\ t_1=-3,\ t_2=2\end{cases}\\ \begin{cases} x-3>0\ (\sqrt{x^2+2x-15}=t,t\geq 0)\\ t_3=-2,\ t_4=3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3\\ \sqrt{x^2+2x-15}=2\end{cases}\\ \begin{cases} x>3\\ \sqrt{x^2+2x-15}=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3\\ x^2+2x-19=0\end{cases}\\ \begin{cases} x>3\\ x^2+2x-24=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3\\ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{20}\end{cases}\\ \begin{cases} x>3\\ x_3=-6,\ x_4=4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\\ x=-1-2\sqrt{5}.\end{array}\right.$$ ◄

Приклад **2.27.** Для всіх значень параметра a розв’язати рівняння:

$$ax^2+2(a+1)x+2a=0.$$

► Розглянемо випадки $a=0$ і $a\neq 0.$ $a=0: 2x=0 \Leftrightarrow x=0;$ $a\neq 0$: знайдемо дискримінант рівняння $D=4(a+1)^2-8a^2=-4(a^2-2a-1).$ Якщо $D>0: 2a+1-a^2>0 \Leftrightarrow a\in\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2};\right)\setminus\{0\}$ існують два дійсних кореня $x_{1,2}=\dfrac{-(a+1)\pm\sqrt{2a+1-a^2}}{a}$; При $a\in\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ $(D<0)$ дійсних розв’язків рівняння не існує . При $a=1\pm\sqrt{2}$ $\left(D=0\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{-(a+1)}{a}$. ◄

Приклад **2. 28.** При якому цілому значенні параметра a один із коренів рівняння

$4x^2-(3a+2)x+a^2-1=0$ втроє більший від іншого?

► Розглянемо систему рівнянь еквівалентну даній задачі:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=\left(a^2-1\right)/4 \\ x_1+x_2=(3a+2)/4 \\ x_1=3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2^2=\left(a^2-1\right)/4 \\ 4x_2=(3a+2)/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\dfrac{3a+2}{16}\right)^2=\dfrac{a^2-1}{4} \\ x_2=\dfrac{3a+2}{16}. \end{cases}$$

Знайдемо a із першого рівняння системи : $37a^2-36a-76=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=2 \\ a_2=-38/37. \end{array}\right.$ Отже, $a=2.$ ◄

Розв’язати нерівності (2.29 – 2.37):

Приклад **2.29.** $\dfrac{\left(x-1\right)^3\left(x+5\right)^2\left(3-x\right)}{x+4}\geq 0.$

► На числовій прямій відкладемо точки, в яких хоча б один із співмножників обертається на нуль. Це значення $x=-5,\ x=-4,\ x=1,\ x=3.$ Розглянемо систему рівносильну даній нерівності: $\begin{cases}\left(x-1\right)^3\left(x+5\right)^2\left(x-3\right)\left(x+4\right)\leq 0 \\ x\neq 4\end{cases}.$ Користуючись узагальненим правилом інтервалів, проведемо «змійку», починаючи з додатного значення на проміжку $(3;+\infty)$ і, змінюючи знак на протилежний, в точках $x=3,\ x=1,\ x=4,$ для яких показники степеня непарні і, не змінюючи знак в точці $x=-5,$ бо вираз $\left(x+5\right)$ входить в добуток з парним показником. Вибираємо проміжки, на яких добуток має не додатний знак. Отже, $x\in\left(-\infty;-4\right)\cup\left[1;3\right].$ ◄

Приклад **2.30.** $|x-2|\leq|x+4|.$

► Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності $\left(x-2\right)^2\leq\left(x+4\right)^2 \Leftrightarrow 12x\geq -12 \Leftrightarrow x\in\left[-1;+\infty\right).$ ◄

Приклад **2.31.** $\left|x^2-3x+2\right|\le 2x-x^2$.

► Розглянемо систему нерівностей, яка рівносильна вихідній нерівності:

$$\begin{cases} x^2-3x+2\le 2x-x^2 \\ x^2-3x+2\ge -2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2\le 0 \\ x-2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[1/2;2] \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1/2;2]. ◄$$

Приклад **2.32**. $|x+2|-3x+|5-x|\le|x-1|+2$.

► Знайдемо значення x, при яких кожний вираз під знаком модуля обертається на нуль: $x=-2,\ x=5, x=1$. Нанесемо ці точки на числову вісь, маємо інтервали: $x\in(-\infty;-2], x\in(-2;1], x\in(1;5], x\in(5;+\infty)$. Розкриємо знак модуля в кожному інтервалі і отримаємо сукупність чотирьох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-2] \\ -x-2-3x+5-x\le -x+1+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-2;1] \\ x+2-3x+5-x\le -x+1+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(1;5] \\ x+2-3x+5-x\le x-1+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(5;+\infty) \\ x+2-3x-5+x\le x-1+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-2] \\ x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(-2;1] \\ x\ge 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(1;5] \\ x\ge 2/3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in(5;+\infty) \\ x\ge -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing \\ x\in\varnothing \\ x\in(1;5] \\ x\in(5;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(1;+\infty). ◄$$

Приклад **2.33.** $\big|3-|x-2|\big|\le 1$.

► Розглянемо рівносильну даній нерівності систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3-|x-2|\le 1 \\ 3-|x-2|\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|\ge 2 \\ |x-2|\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-2\ge 2 \\ x-2\le -2 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x-2\le 4 \\ x-2\ge -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ x\le 0 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x\le 6 \\ x\ge -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty) \\ x\in[-2;6] \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-2;0]\cup[4;6]. ◄$$

Приклад **2.34.** $\sqrt{x+1}>\sqrt{x-1}$.

► Дана нерівність рівносильна наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x+1>x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\in\mathbf{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1;+\infty). ◄$$

Приклад **2.35.** $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\ge\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

► ОДЗ вихідної нерівності визначається системою

$$\begin{cases}12+x-x^2\ge 0\\ x-11\ne 0\\ 2x-9\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-3;4]\\ x\ne 11\\ x\ne 9/2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-3;4].$$ Для значень $x=-3$ і $x=4$ нерівність виконується, отже, ці значення є розв'язками. Нехай $x\in(-3;4)$. Для будь-якого x із цього інтервалу $2x-9<0,\ x-11<0$ і $12+x-x^2>0$, тому вихідна нерівність на інтервалі $(-3;4)$ буде рівносильна нерівності $x-11\le 2x-9\Leftrightarrow x\ge -2.$ Враховуючи, що $-3<x<4$, маємо $x\in[-2;4)$. Тобто, остаточно, розв'язком нерівності є $x\in[-2;4]\cup\{-3\}$. ◄

Приклад **2.36.** $\sqrt{(x+4)(x+3)}>6-x.$

► Дана нерівність рівносильна сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6-x\ge 0\\ (x+4)(x+3)>(6-x)^2\end{cases}\\ \begin{cases}6-x<0\\ (x+4)(x+3)\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 6\\ x>24/19\end{cases}\\ \begin{cases}x>6\\ x\in(-\infty;-4]\cup[-3;+\infty)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(24/19;+\infty). ◄$$

Приклад **2.37.** $\sqrt{4x-x^2}<4-x$.

► Дана нерівність рівносильна системі нерівностей $\begin{cases}4-x>0\\ 4x-x^2\ge 0\\ 4x-x^2<16-8x+x^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ x(x-4)\le 0\\ x^2-6x+8>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ x\in[0;4]\\ x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0;2)\,. ◄$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння :

1. $x^4+x^2-2=0.$ Відповідь: $x\in\{\pm 1\}$.
2. $x^4+5x^2+6=0.$ Відповідь: $x\in\varnothing$.
3. $4x^4-5x^2+1=0.$ Відповідь: $x\in\{-1;-1/2;1/2;1\}$.
4. $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0.$ Відповідь: $x\in\{-1;-1/2;1/2;1\}$.
5. $x^4+3x^3-2x^2-6x+4=0.$ Відповідь: $x\in\{-1\pm\sqrt{3};-2;1\}$.
6. $x^4-3x^3-6x^2+12x+16=0.$ Відповідь: $x\in\{1\pm\sqrt{5};(1\pm\sqrt{17})/2\}$.
7. $x^3-x^2+x-1=0$. Відповідь: $x\in\{1\}$.
8. $\dfrac{3x}{x^3-1}-\dfrac{5}{4x^2+4x+4}=\dfrac{1}{2(1-x)}$. Відповідь: $x\in\{-7/2;-1\}$.

9. $\dfrac{x}{2x^2+12x+10}+\dfrac{3x+1}{4x^2+16x-20}-\dfrac{x+34}{2x^3+5x^2-x-5}=0$. Відповідь: $x\in\{27/5\}$.

10. $\dfrac{2x-7}{x^2-9x+14}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}$. Відповідь: $x\in\{0\}$.

11. $\dfrac{3}{x^2-9}-\dfrac{1}{9-6x+x^2}=\dfrac{3}{2x^2+6x}$. Відповідь: $x\in\{9\}$.

12. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$. Відповідь: $x\in\{1/2;-1/12\}$.

13. $\dfrac{2x}{x^2-2x+5}+\dfrac{3x}{x^2+2x+5}=\dfrac{7}{8}$. Відповідь: $x\in\{1;5\}$.

14. $(x+4)^2(x+10)(x-2)+243=0$. Відповідь: $x\in\{-7;-1;-4\pm3\sqrt{3}\}$.

15. $\dfrac{x^2+2x-6}{x}-\dfrac{3x}{x^2+2x-6}=-2.$ Відповідь: $x\in\{-6;-3;1;2\}$.

16. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=120.$ Відповідь: $x\in\{0;7\}$.

17. $(x+1)(x+3)(x+7)(x+5)=9.$ Відповідь: $x\in\{-4;-4\pm\sqrt{10}\}$.

18. $\dfrac{x^2+x-5}{x}-\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$ Відповідь: $x\in\{-1\pm\sqrt{6};-5;1\}$.

19. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)=30x^2.$ Відповідь: $x\in\{1;12\}$.

20. $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2.$ Відповідь:
$x\in\{(9\pm\sqrt{73})/2;\ (-3\pm\sqrt{7})/2\}$.

13. $(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2.$ Відповідь:
$x\in\{-6;-4;(-15\pm\sqrt{129})/2\}$.

21. $x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40.$ Відповідь: $x\in\{1\pm\sqrt{19}\}$.

22. $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5.$ Відповідь: $x\in\{-1;2\}$.

23. $|4x+1|=5$. Відповідь: $x\in\{1;-3/2\}$.

24. $x^2-|x|-2=0$. Відповідь: $x\in\{\pm2\}$.

25. $||x|-2|=2$. Відповідь: $x\in\{0;\pm4\}$.

26. $|x-2|\cdot x-6x+8=0$. Відповідь: $x\in\{-2\pm2\sqrt{3};4+2\sqrt{2}\}$.

27. $x^2+2x+3\dfrac{|x-1|}{x-1}=0$. Відповідь: $x\in\{-3\}$.

28. $|x^2-2x|=3-2x$. Відповідь: $x\in\{-\sqrt{3};1\}$.

29. $|x-|x-|x-1|||=\dfrac{1}{2}$. Відповідь: $x\in\{1/6;1/2;3/2\}$.

30. $|x-3|+|1-x|=1$. Відповідь: $x\in\varnothing$.

31. $|x+3|+|x-5|+|12-x|=20.$ Відповідь: $x\in\{0;10\}$.

32. $|x+3|+|x-5|=8.$ Відповідь: $x\in[-3;5].$

33. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$ Відповідь: $x\in\{3\}.$

34. $x-3+\sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}=\dfrac{12}{x+3}.$ Відповідь: $x\in\{-5;3\sqrt{2}\}.$

35. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}.$ Відповідь: $x\in\{-3;-1/11\}.$

36. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$ Відповідь: $x\in\{1;2;10\}.$

37. Для всіх значень параметра a розв'язати рівняння

1) $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0.$

2) $(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0.$

Відповідь:

1) Якщо $a=-1/3,$ то $x=-1;$ якщо $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;-1/3)\cup(-1/3;+\infty),\ x\in\{-1;2a/a+1\}.$

2) Якщо $a=0: x=1/4;\ a=1/2:\ x=1,5;$ якщо $a\in(0,2;1)\cup(1;+\infty):\ x\in\left\{\dfrac{-(a+1)\pm\sqrt{5a-1}}{a-1}\right\}.$

Розв'язати нерівності:

38. $|x^2-3x+1|>|x+1|.$ Відповідь: $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty).$

39. $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8}+\dfrac{3x}{4x^2-6x+8}>\dfrac{1}{6}.$ Відповідь: $x\in(1/4;8).$

40. $2|x-1|+|x+2|<6-3x.$ Відповідь: $x\in(-\infty;1).$

41. $\dfrac{x-|x-4|}{2-|6-x|}>2.$ Відповідь: $x\in(4;6)\cup(6;8).$

42. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}.$ Відповідь: $x\in(-3;-2)\cup(-1;1).$

43. $\dfrac{x^2-5x-6}{|x|-7}<0.$ Відповідь: $x\in(-7;2)\cup(3;7).$

44. $|x^2+3x|\geq 2-x^2.$ Відповідь: $x\in(-\infty;-2/3]\cup[1/2;+\infty).$

45. $|x-6|<x^2-5x+9.$ Відповідь: $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty).$

46. $\dfrac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}\geq 1.$ Відповідь: $x\in\left(-\infty;\left(1+\sqrt{17}\right)/4\right].$

47. $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}}\geq 0.$ Відповідь: $x\in[-3;6]\cup(8;+\infty).$

48. $\sqrt{(x-1)^4(x+2)^4(x-7)}\geq 0.$ Відповідь: $x\in\{-2;1\}\cup[7;+\infty).$

49. $\sqrt{x^2+3x+3}<2x+1.$ Відповідь: $x\in(2/3;+\infty).$

50. $\sqrt{x^2+x-2}>x.$ Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup(2;+\infty).$

51. $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\leq\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}.$ Відповідь: $x\in\{-4\}\cup[2;3].$

3. СИСТЕМИ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Нехай маємо m рівнянь $f_1(x_1, x_2,..., x_n) = 0,$ $f_2(x_1, x_2,..., x_n) = 0,...,$ $f_m(x_1, x_2,..., x_n) = 0,$ $(m, n \in \mathbf{N})$ з n змінними $x_1, x_2,..., x_n$. Множину цих рівнянь називають системою рівнянь, якщо потрібно знайти всі впорядковані набори із n чисел $(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$ такі, що задовольняють кожне з рівнянь множини. Ці впорядковані набори чисел називаються розв'язками системи рівнянь. Записують систему рівнянь так:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2,..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2,..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2,..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Якщо для множини рівнянь потрібно визначити усі впорядковані набори із n чисел, які задовольняють хоча б одному із множини рівнянь, то цю множину називають сукупністю рівнянь. Записують сукупність рівнянь так:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2,..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2,..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2,..., x_n) = 0. \end{array}\right.$$

Дві системи рівнянь (1) і (2) називаються рівносильними, якщо всі розв'язки системи (1) є розв'язками системи (2) і навпаки всі розв'язки системи (2) є розв'язками системи (1).

Якщо всі розв'язки системи (1) є розв'язками системи (2), то систему (2) називають наслідком системи (1).

Сформулюємо основні правила перетворення систем рівнянь:

- Якщо будь-яке з рівнянь системи замінити рівносильним йому рівнянням, а останні залишити без змін, то одержана система буде рівносильною вихідній.

- Якщо будь-яке з рівнянь системи замінити його наслідком, а останні залишити без змін, то одержана система буде наслідком вихідної, а отже, може мати зайві розв'язки.

- Нехай $f_i = 0$ і $f_j = 0$ $(i \neq j, 1 \leq i, j \leq m)$ - два довільні рівняння даної системи і a, b, c, d - довільні дійсні числа такі, що $ad \neq bc$. Якщо в системі замінити ці два рівняння відповідно рівняннями $af_i + bf_j = 0$ і $cf_i + df_j = 0$, а останні залишити без змін, то одержана система буде рівносильною вихідній.

- Нехай одне з рівнянь системи, скажімо $f_1(x_1, x_2,..., x_n) = 0$, рівносильне рівнянню $x_1 = \varphi(x_2,..., x_n)$, тоді система

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_2,...,x_n), \\ f_2(\varphi, x_2,...,x_n) = 0, \\ f_3(\varphi, x_2,...,x_n) = 0, \\ .... \\ f_m(\varphi, x_2,...,x_n) = 0, \end{cases}$$

буде рівносильна вихідній системі.

3.1. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Графічно кожне рівняння задає пряму лінію в координатній площині $X0Y$.

Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система має єдиний розв'язок (графічно: прямі перетинаються).

Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків (графічно: прямі співпадають).

Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язків (графічно: прямі паралельні).

При розв'язанні даної системи можна застосувати метод виключення однієї змінної або спосіб підстановки.

3.2. Системи однорідних рівнянь

Це системи рівнянь виду $\begin{cases} f(x,y) = a, \\ g(x,y) = b, \end{cases}$ де $f(x,y)$ і $g(x,y)$ однорідні функції однакового степеня однорідності $r \in \mathbf{N}$: $f(kx,ky) = k^r f(x,y)$, $g(kx,ky) = k^r g(x,y)$, $k \in \mathbf{R}$. Системи однорідних рівнянь розв'язуються за наступною схемою:

а) $$\begin{cases} f(x,y) = a, \\ g(x,y) = b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bf(x,y) - ag(x,y) = 0, \\ g(x,y) = b, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} bf(1,\frac{y}{x}) - ag(1,\frac{y}{x}) = 0, \\ g(x,y) = b, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ f(x,y) = a, \\ g(x,y) = b. \end{cases} \end{array} \right.$$

б) Виконаємо заміну $\frac{y}{x} = t$ і знаходимо корені рівняння $bf(1,t) - ag(1,t) = 0$.

в) Розв'язуємо систему (або сукупність систем, якщо одержано декілька значень t):

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = t, \\ g(x,y) = b, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = t, \\ f(x,y) = a. \end{cases}$$

3.3. Системи вигляду $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1x + d_1y + e_1y^2 = m_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2x + d_2y + e_2y^2 = m_2. \end{cases}$

При розв'язанні таких систем треба виключити в одному з рівнянь член з x^2 або y^2, що дасть можливість без радикалів виразити, наприклад, x як функцію від y або навпаки. Далі застосувати метод підстановки.

3.4. Симетричні системи рівнянь

Систему вигляду $\begin{cases} f(x,y) = a, \\ g(x,y) = b \end{cases}$ називають симетричною, якщо $f(x,y)$ і $g(x,y)$ – це симетричні многочлени відносно змінних x і y, тобто $f(x,y) = f(y,x), \quad g(x,y) = g(y,x)$.

Будь-який симетричний многочлен двох змінних можна виразити через $x+y$ і xy. Зокрема:

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy,\ x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y),\ x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 =$
$= ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2.$

Розв'язання вихідної системи можна провести за наступною схемою:

а) виконати заміну $x + y = u,\ xy = v,$

б) розв'язати систему відносно u і v,

в) знайти x і y як розв'язок системи $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$

Приклади

Розв'язати системи рівнянь (3.1. – 3.7.):

Приклад **3.1.** $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 5x + 2y = 23. \end{cases}$

► Помножимо перше рівняння на 2 і додамо до другого: $11x = 33 \Rightarrow x = 3.$
Із першого рівняння маємо: $y = 3x - 5$. Отже $x = 3, y = 4$.◄

Приклад **3.2.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$

► Позначимо $\frac{1}{x+y}=u,\ \frac{1}{x-y}=v,$ тоді будемо мати систему:

$$\begin{cases} u+v=2, \\ 3u+4v=7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=2-v, \\ 3(2-v)+4v=7. \end{cases} \Rightarrow v=1, u=1.$$

Повертаючись до старих змінних, маємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=1, \\ \frac{1}{x-y}=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ x-y=1, \\ x\neq \pm y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$$ ◄

Приклад **3.3.** $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

► Використаємо метод підстановки

$$\begin{cases} y=-x-8, \\ x^2+(x+8)^2+6x-2(x+8)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-8, \\ x^2+10x+24=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-6, y_1=-2; \\ x_2=-4, y_2=-4. \end{array} \right.$$

Тобто $(x,y)\in\{(-6,-2);(-4,-4)\}$. ◄

Приклад **3.4.** $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

► Перепишемо систему так: $\begin{cases} (x+y)+xy=11, \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$ і введемо заміну $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v, \end{cases}$ тоді будемо мати $\begin{cases} u+v=11, \\ uv=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=11-v, \\ (11-v)v=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=11-v, \\ v^2-11v+30=0 \end{cases}$ звідки $(u,v)\in\{(5;6),(6;5)\}$. Тоді маємо сукупність систем $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5. \end{cases}$ Розв'язавши ці системи, отримаємо: $(x;y)\in\{(5;1),(1;5),(2;3),(3;2)\}$. ◄

Приклад **3.5.** $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=37, \\ 2x^2+2xy+y^2=26. \end{cases}$

► Оскільки ліві частини рівнянь є однорідні функції другого порядку, то використаємо алгоритм розв'язання системи однорідних рівнянь. Помножимо перше рівняння на -26, друге на 37, почленно додамо і одержимо

$$48x^2+48xy-15y^2=0 \Leftrightarrow 16x^2+16xy-5y^2=0.$$

Поділимо ліву і праву частини рівняння на $x^2\neq 0: 16+16\frac{y}{x}-5\left(\frac{y}{x}\right)^2=0.$

Зробимо заміну $\frac{y}{x}=t,$ тоді $5t^2-16t-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=4, \\ t_2=-4/5. \end{array} \right.$ Звідки $\left[\begin{array}{l} y/x=4, \\ y/x=-4/5. \end{array} \right.$ Отже маємо сукупність систем $\begin{cases} y = 4x, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 37 \end{cases}$ і $\begin{cases} y = -4x/5, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 37. \end{cases}$ Розв'язавши ці системи методом підстановки будемо мати відповідь: $(x;y) \in \{(-1;-4),(1;4),(-5;4,(5;-4)\}$. ◄

Приклад **3.6.** $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 2x + y = 8, \\ x^2 + y^2 + xy + y = 4. \end{cases}$

► Друге рівняння помножимо на -2 і додамо до першого, будемо мати рівносильну систему

$$\begin{cases} y^2 - 2xy + 2x - y = 0, \\ x^2 + y^2 + xy + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-1) - 2x(y-1) = 0, \\ x^2 + y^2 + xy + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(y-2x) = 0, \\ x^2 + y^2 + xy + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x, \\ 7x^2 + 2x - 4 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Розв'язавши відповідні квадратні рівняння будемо мати відповідь:

$(x;y) \in \{(1;1),(-2;1),(\frac{-1+\sqrt{29}}{7};\frac{-2+2\sqrt{29}}{7}),(\frac{-1-\sqrt{29}}{7};\frac{-2-2\sqrt{29}}{7})\}$. ◄

Приклад **3.7.** $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

► Знайдемо ОДЗ: $x^2 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 2|y|$.

Пара чисел $x = 0, y = 0$ не задовольняє перше рівняння системи. Отже, вихідна система рівносильна сукупності двох систем рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ x - y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y, \\ x - y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Звідки маємо відповідь: $(x;y) \in \{(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}),(4;2)\}$. ◄

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь:

1. $\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 7x + 2y = 5 \end{cases}$ Відповідь: $(x, y) \in \left\{\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right)\right\}$
2. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 7 \end{cases}$ Відповідь: $(x, y) \in \emptyset$
3. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$ Відповідь: $x = t, y = 2t - 2, t \in R$.

4. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy+3y^2=6 \end{cases}$ Відповідь:

$(x,y)\in\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\frac{2\sqrt{6}}{11};\frac{\sqrt{6}}{11}\right),\left(\frac{-2\sqrt{6}}{11};\frac{-\sqrt{6}}{11}\right)\right\}$.

5. $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$ Відповідь:$(x;y)\in\{(2;3),(3;2)\}$.

6. $\begin{cases} x+y-2\sqrt{xy}=4 \\ x+y=10 \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\{(1;9),(9;1)\}$.

7. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\{(-1;-2),(2;1)\}$.

8. $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ xy-y^2=2. \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\left\{(\pm3;\pm1),\left(\pm2\sqrt{2};\pm\sqrt{2}\right)\right\}$.

9. $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3. \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\{(0;-3),(-3;0),(1;\pm2),(\pm2;1)\}$.

10. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1. \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\{(5;3)\}$.

11. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8. \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\{(12;4),(34;-30)\}$.

12. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y+1}=1 \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\{(1;0)\}$.

13. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=3/2 \\ x+y+xy=9 \end{cases}$ Відповідь: $(x;y)\in\{(4;1);(-9;-9/4)\}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вишенський В. А. Задачі з математики / В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко. – К. : Либідь, 1990. – 328 с.
2. Ковальчук В. Ф. Математика : навч. посібник / В. Ф. Ковальчук, С. Д. Корнієць, В. І. Лавренюк та ін. ; Київський ун-т ім. Т. Шевченка. – К. : МСП «Козаки», 1996. – 292 с.
3. Шарова Л. І. Уравнения и неравенства : Пособие для подготовительных отделений / Л. І. Шарова. – К. : Вища школа, 1981. – 315 с.
4. Ясінський В. В. Математика : Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ» / В. В. Ясінський. – К. : НТУУ «КПІ». 2005. – 372 с. – (серія «На допомогу абітурієнту»).

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

ОЛЬГА БОРИСЕНКО

АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ: ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА

Відповідальний за випуск О. В. Лісовий

Формат 60x84 1/16. Друк цифровий.
Папір офсетний 80 г/м2.
Наклад 500 прим.

Видавництво: ТОВ «Праймдрук»
01023, м. Київ, вул. Еспланадна, 20, офіс 213
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серія ДК № 4222 від 07.12.2011.