МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. В. Плахотник

100 КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

Всеукраїнський конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2010–2011 н. р.

Київ 2011

Рекомендовано науково-методичною радою
Національного центру «Мала академія наук України»
(протокол № 2 від 03.10.2011 р.)

Плахотник В. В. 100 контрольних завдань з математики. Всеукраїнський конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2010–2011 н. р. / [за ред. О. В. Лісового]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2011. – 36 с.

У збірнику представлено розв'язки 100 задач із контрольних робіт з математики фінального етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2010–2011 н. р.

Видання розраховане на старшокласників – учасників конкурсу-захисту – для перевірки виконаних робіт, а також на допомогу іншим учням з метою підготовки до контрольних робіт у Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН України.

Передмова

Про контрольну роботу з математики на Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН у 2010–2011 навчальному році

У збірнику наведено розв’язування 100 задач із контрольних робіт з математики фінального етапу конкурсу-захисту Малої академії наук у 2010–2011 н. р. для відділень «Математика», «Економіка» і «Комп’ютерні науки».

На мою думку, завдання з математики не повинне суттєво різнитися для учасників різних відділень, тому в цьому посібнику немає поділу задач на відділення, секції, рівні.

Задачі укладено відповідно до вікових категорій, проте завдання для дев’ятикласників можна запропонувати учасникам як десятого, так і одинадцятого класів. Наявність спільних або аналогічних завдань дає змогу порівняти рівень підготовки учнів різних класів, оскільки всі вони брали участь в одному конкурсі, боролися за перемогу один з одним.

Читачеві збірника рекомендую відновити всі подробиці кожного наведеного розв’язку, оскільки здебільшого є лише ескіз розв’язання. Крім того, на сайті Малої академії наук (http://man.gov.ua/) пропоную знайти задачі контрольної роботи у 2010–2011 н. р. для відділення, яке Вас найбільше цікавить, і спробувати розв’язати всі наведені там задачі, користуючись цим посібником чи без нього.

Це видання допоможе в підготовці до аналогічної контрольної роботи наступним учасникам конкурсу МАН.

Володимир Плахотник,
доцент кафедри загальної математики механіко-математичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
кандидат фізико-математичних наук

Приклади задач для 9-го класу

1. Скільки всього цілих чисел є серед розв'язків нерівності $\sqrt{100+2x-x^2} \le x$?

Бачимо, що від'ємних розв'язків немає, бо ліва частина нерівності не від'ємна. Підносячи до квадрату обидві частини нерівності, отримуємо рівносильну систему $\begin{cases} x^2-2x-100 \le 0 \\ x^2-x-50 \ge 0 \end{cases}$. Розв'язуючи квадратні рівняння, дістанемо нерівність $\frac{1+\sqrt{204}}{2} \le x \le 1+\sqrt{101}$, цілими розв'язками якої є числа 8, 9 і 10 (три розв'язки).

2. Відомо, що всі сторони прямокутного трикутника дорівнюють цілим числам. Знайти всі такі трикутники, якщо один із його катетів дорівнює 12.

Вважаючи невідомими гіпотенузу c і катет a, за теоремою Піфагора маємо $(c-a)(c+a)=144$. Числа $c+a$ і $c-a$ обидва парні, бо їхня різниця є парним числом, і $c-a<c+a$, тому маємо одну із систем $\begin{cases} c-a=2, \\ c+a=72, \end{cases}$ $\begin{cases} c-a=4, \\ c+a=36, \end{cases}$ $\begin{cases} c-a=6, \\ c+a=24, \end{cases}$ $\begin{cases} c-a=8, \\ c+a=18, \end{cases}$ звідси дістає чотири трикутники, у яких дві сторони (крім відомого катета) дорівнюють $c=37,\ a=35$ або $c=20, a=16$, або $c=15, a=9$ або $c=13, a=5$. Побудувати графік $y=\frac{|x+1|-|x-1|}{|x|}$.

Розглянемо чотири проміжки, на які ділять точки $x=-1, x=0, x=1$ числову пряму. Дістанемо $y=\frac{2}{x}$, якщо $x \le -1$; $y=-2$, якщо $-1 \le x < 0$; $y=2$, якщо $0 < x \le 1$; $y=\frac{2}{x}$, якщо $x \ge 1$. Звідки й дістанемо графік, утворений двома дугами гіперболи і двома відрізками.

3. Знайти кількість дійсних різних коренів рівняння $(x-a)(x^2-2x+a)=0$ залежно від значення параметра a.

Маємо $x_1 = a, x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-a}$. Це означає, що при $a > 1$ рівняння матиме єдиний корінь $x = a$, а при $a \le 1$ рівняння матиме три корені, однак деякі з них можуть збігатися. Так, якщо $a = 1$, то $x_2 = x_3$, і при такому значенні параметра a всі три корені будуть рівними. Умова $a = 1 - \sqrt{1-a}$ справджуватиметься, якщо $a = 1$ чи $a = 0$. Умова $a = 1 + \sqrt{1-a}$ буде справджуватись, лише якщо $a = 1$. Звідси відповідь. При $a \ge 1$ рівняння має єдиний корінь, при $a = 0$ воно має два корені, а за інших значень параметра a воно має три корені.

4. Довести, що фігура, утворена двома графіками $y = x^2 - 2x + 3$ та $y = -x^2 - 4x$, має центр симетрії, і знайти координати центра симетрії.

Фігура утворена двома параболами, вітки яких спрямовані в різні сторони. Тому центром симетрії може бути лише точка – середина відрізка, який з'єднує їх вершини; цією точкою є точка $M(-\frac{1}{2};3)$. Залишається довести, що ця точка справді є центром симетрії фігури. Нехай $(u;v)-$ довільна точка на першій параболі. Тоді точка, симетрична до неї відносно точки *M*, матиме координати $(-1-u;6-v)$. Залишається пересвідчитись, що ця точка лежить на другій параболі. Для цього потрібно довести, що $6 - v = -(-1-u)^2 - 4(-1-u)$. Ця рівність рівносильна рівності $v = u^2 - 2u + 3$, яка справджується, бо точка $(u;v)$ лежить на першій параболі.

5. Довести, що для довільного цілого m існує таке ціле n, що число $n^4 + 3n + m$ без остачі ділиться на 7.

Потрібно довести, що вираз $n^4 + 3n$ може давати всі можливі остачі при діленні на 7. Тоді, яку б остачу не давало число m при діленні на 7, ми доберемо відповідне значення числа n, щоб остача суми $(n^4 + 3n) + m$ дорівнювала нулю.

Число n може давати остачі $0,1,2,3,4,5,6$, тоді, відповідно, число $3n$ даватиме остачі $0,3,6,2,5,1,4$, а число n^4 даватиме остачі $0,1,2,4,4,2,1$. Додаючи відповідні остачі, отримаємо, що $n^4 + 3n$ дає остачі $0,4,1,6,2,3,5$ (усі можливі остачі).

6. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою c і катетом a бісектриса кута, утвореного ними, ділить висоту, проведену з вершини прямого кута, на дві частини. Знайти відношення більшої з них до меншої.

Нехай $CD-$ висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, $BL-$ бісектриса гострого кута, яка перетинає CD у точці O. За властивістю бісектриси BO кута B у прямокутному трикутнику BCD дістанемо рівність $\frac{CO}{OD}=\frac{BC}{BD}$, тому досить знайти $BD=\frac{a^2}{c}$, щоб дістати відповідь $\frac{CO}{OD}=\frac{c}{a}$.

7. Нехай для опуклого чотирикутника $ABCD$ і довільної точки M його площини вираз $AM^2+CM^2-BM^2-DM^2$ не залежить від положення точки M. Довести, що $ABCD$ є паралелограмом.

Узявши послідовно $M=A, M=B, M=C, M=D,$ з умови задачі дістанемо рівності:

$CA^2-BA^2-DA^2=AB^2+CB^2-DB^2=AC^2-BC^2-DC^2=AD^2+CD^2-BD^2$.

Звідси (порівнявши перший і третій вираз, а потім – другий і четвертий) отримаємо систему $\begin{cases} AB^2+BC^2=AD^2+CD^2, \\ AB^2+AD^2=BC^2+CD^2. \end{cases}$

Додавши і віднявши рівності системи, дістанемо $AB=CD, BC=AD$, що й потрібно довести.

8. Нехай $ABC-$трикутник, у якому $AB=3\sqrt{2}, BC=5, AC=7.$ У площині трикутника знайти всі такі точки M, що $2MB^2+36MC^2=MA^2$.

Уведемо систему координат, вважаючи, що $A(0;0)$, $C(7;0)$, тоді для відшукання координат $(u,v), v>0$ точки B дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} u^2+v^2=18, \\ (u-7)^2+v^2=25, \end{cases}$$

після розв’язання якої отримаємо $B(3;3)$. Тепер умову задачі можна легко записати, вважаючи, що невідома точка має координати $(x;y)$. Дістанемо рівність $2((x-3)^2+(y-3)^2)+36((x-7)^2+y^2)=x^2+y^2$, з якої, розкриваючи дужки та по-іншому групуючи доданки, отримаємо $(x-\frac{258}{37})^2+(y-\frac{6}{37})^2=0$.

Така рівність можлива лише для однієї точки з координатами $x=\frac{258}{37}, y=\frac{6}{37}$.

9. Знайти множину всіх значень, яких може набувати функція $y=\frac{x^2-x}{x^2+1}$.

Переформулюємо умову задачі по-іншому. За яких значень параметра y рівняння $y=\frac{x^2-x}{x^2+1}$ має принаймні один розв'язок? Для відповіді на це запитання запишемо рівняння як квадратне, попередньо розглянувши випадок $y=1$: $(y-1)x^2+x+y=0$. Знайшовши дискримінант, розв'яжемо нерівність $D\geq 0$. Звідки й дістанемо відповідь $y\in[\frac{1-\sqrt{2}}{2};\frac{1+\sqrt{2}}{2}]$.

10. Знайти всі значення параметра a, за яких нерівність $x^2-(3a-5)x-a+\frac{5}{4}\leq 0$ має рівно два цілі розв'язки. Чи може ця нерівність мати лише один цілий розв'язок?

Зауважимо, що параболи, які є графіками функцій у лівій частині нерівності, проходять через точку $(-\frac{1}{3};-\frac{11}{36})$, яка не залежить від параметра a. Тому тими двома цілими розв'язками нерівності, про які йдеться в умові, можуть бути лише або 0 і 1, або –1 і 0, або –1 і –2. У випадку тільки одного розв'язку ним може бути лише або 0, або 1. Детальніше розберемо випадок, коли розв'язками будуть цілі числа 0 і 1. Для цього необхідно і достатньо, щоб справджувались чотири нерівності $f(0)\leq 0, f(1)\leq 0, f(-1)>0, f(2)>0$, де $f(x)-$функція в лівій частині нерівності. Дістанемо систему нерівностей

$$\begin{cases} -a+\frac{5}{4}\leq 0 \\ 1-3a+5-a+\frac{5}{4}\leq 0 \\ 1+3a-5-a+\frac{5}{4}>0 \\ 4-2(3a-5)-a+\frac{5}{4}>0 \end{cases},$$

розв'язавши яку, отримаємо відповідь у цьому випадку $\frac{29}{16} \le a < \frac{61}{28}$.

Аналогічно розглядаються всі інші випадки.

11. У трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено висоту CD. Радіуси вписаних кіл трикутників ACD і BCD дорівнюють 5 і 12 відповідно. Знайти радіус вписаного кола трикутника ABC.

Відомо, що ця висота розтинає цей трикутник на два трикутники, кожен із яких подібний до початкового. З умови задачі випливає, що коефіцієнт подібності цих трикутників дорівнює $\frac{5}{12}$ і дорівнює відношенню катетів початкового трикутника (нехай вони дорівнюють $5x$ і $12x$). За теоремою Піфагора дістанемо гіпотенузу $13x$. Отже, коефіцієнт подібності найменшого трикутника і початкового дорівнює $\frac{5}{13}$, значить, радіус вписаного кола початкового трикутника дорівнює 13.

12. За яких невід'ємних значень числа a для кожного x, що є розв'язком нерівності $x^2 - a \le 0$, буде справджуватись нерівність $x^2 + 2x - 3 \le 0$?

Проміжок $[-\sqrt{a};\sqrt{a}]$ буде частиною проміжку $[-3;1]$, якщо $0 \le a \le 1$.

13. Пішохід пройшов першу половину шляху зі швидкістю $4\frac{\text{км}}{\text{год}}$. З якою швидкістю він має рухатись на другій половині шляху, щоб його середня швидкість на всьому шляху дорівнювала $5\frac{\text{км}}{\text{год}}$?

Маємо $t = \frac{S}{8} + \frac{S}{2x}$, тому $\dfrac{S}{\frac{S}{8} + \frac{S}{2x}} = 5$ за умовою. Звідси $6x = 40$, $x = \frac{20}{3}$.

14. Вершинами трикутника є основи висот деякого гострокутного трикутника ABC. Виявилось, що такий трикутник подібний до трикутника ABC. Довести, що трикутник ABC правильний.

Трикутник, вершинами якого є одна з вершин цього трикутника і дві прилеглі основи висот, подібний до початкового. Тому кути даного в умові трикутника дорівнюють $180^\circ - 2\alpha, 180^\circ - 2\beta, 180^\circ - 2\gamma$, які дорівнюють (не обов’язково відповідно) кутам α,β,γ. Звідси маємо три істотно різні системи рівнянь

$$\begin{cases}180^\circ-2\alpha=\alpha,\\180^\circ-2\beta=\beta,\\180^\circ-2\gamma=\gamma,\end{cases}\quad\begin{cases}180^\circ-2\alpha=\alpha,\\180^\circ-2\beta=\gamma,\\180^\circ-2\gamma=\beta,\end{cases}\quad\begin{cases}180^\circ-2\alpha=\beta,\\180^\circ-2\beta=\gamma,\\180^\circ-2\gamma=\alpha.\end{cases}$$

У будь-якому випадку дістанемо $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$.

15. Скількома способами можна провести пряму, яка поділяє навпіл як площу, так і периметр трикутника зі сторонами 8 см, 10 см і 12 см?

Пряму апріорно можна провести, відтинаючи від цього трикутника трикутник зі спільною вершиною і сторонами x та y. З умови задачі дістанемо три системи рівнянь для їх відшукання:

$$\begin{cases}x+y=15\\xy=60\end{cases},\ \begin{cases}x+y=15\\xy=40\end{cases},\ \begin{cases}x+y=15\\xy=48\end{cases}.$$

Перша не має дійсних коренів. Друга має корені, але вони дуже великі, щоб уміститися на сторонах. Третя дає єдиний розв’язок задачі.

16. Нехай $x=2{,}0\pm0{,}1$, $y=3{,}2\pm0{,}2$. Чи правда, що $\dfrac{xy}{x+y}=1{,}23\pm0{,}07$? Відповідь обґрунтувати.

Маємо $1{,}9\le x\le2{,}1$ та $3{,}0\le y\le3{,}4$. Тому $\dfrac{1}{2{,}1}\le\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{1{,}9}$ та $\dfrac{1}{3{,}4}\le\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{3}$, звідки $\dfrac{5{,}5}{2{,}1\cdot3{,}4}=\dfrac{1}{2{,}1}+\dfrac{1}{3{,}4}\le\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{1{,}9}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4{,}9}{5{,}7}$. Отже, для числа $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ маємо оцінку $1{,}16<1{,}163\approx\dfrac{5{,}7}{4{,}9}\le\dfrac{xy}{x+y}\le\dfrac{2{,}1\cdot3{,}4}{5{,}5}\approx1{,}298...<1{,}3$. Твердження умови задачі правильне, бо запис $\dfrac{xy}{x+y}=1{,}23\pm0{,}07$ означає, що $1{,}16\le\dfrac{xy}{x+y}\le1{,}3$.

17. Знайти всі квадратні тричлени $f(x)$, для яких справджуються нерівності: $f(1)\ge5,\ f(2)\le4,\ f(3)\ge2,\ f(4)\le-1.$

Нехай $f(x)=ax^2+bx+c$, тоді за умовою задачі $\begin{cases} a+b+c\ge 5 \\ 4a+2b+c\le 4 \\ 9a+3b+c\ge 2 \\ 16a+4b+c\le -1 \end{cases}$.

Розв'язуючи систему відносно c, дістанемо $\begin{cases} 5-a-b\le c\le 4-4a-2b \\ 2-9a-3b\le c\le -1-4b-16a \end{cases}$.

Для сумісності цієї системи необхідно і достатньо, щоб ліві частини не перевищували правих частин нерівностей. Звідси вийде система

$\begin{cases} b\le -1-3a \\ b\le -2-5a \\ b\ge -2-5a \\ b\le -3-7a \end{cases}$, тому $b=-2-5a$, звідки $\begin{cases} -2-5a\le -1-3a \\ -2-5a\le -3-7a \end{cases}$, отже,

$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$. Тепер із першої системи дістанемо $c=5$, тому $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+5-$ єдиний розв'язок.

18. Відомо, що $n-$ ціле додатне число, а дріб $\frac{7n+3}{4n+5}$ можна скоротити. На яке число цей дріб можна скоротити? Який дріб вийде після скорочення?

Якщо $7n+3$ і $4n+5$ діляться на деяке число d, на це число (додаючи або віднімаючи) ділитимуться числа $3n-2, 6n-4, n+7, 2n-9, 2n+14, 23$. Оскільки число 23 просте, то скоротити дріб можна лише на 23. Дістанемо $\begin{cases} 7n+3=23m \\ 4n+5=23k \end{cases}$,

звідки $n=\frac{23m-3}{7}=\frac{23k-5}{4}$, отже, $\begin{cases} 4m=7k-1 \\ 4\cdot 5=7\cdot 3-1 \end{cases}$. Віднімаючи ці рівності, дістанемо $4(m-5)=7(k-3)$, тому $m=7s+5, k=4s+3$, і після скорочення на 23 отримаємо дріб $\frac{7n+3}{4n+5}=\frac{m}{k}=\frac{7s+5}{4s+3}-$ нескоротний дріб.

19. Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 3 і 7, а бічні сторони дорівнюють 13 і 15? Відповідь обґрунтувати.

Увівши систему координат Oxy, дістанемо $A(0;0), B(a;b), C(a+3;b), D(7;0)$. Можна вважати, що $b>0$. Для відшукання координат отримаємо систему

$\begin{cases} a^2+b^2=169 \\ (a-4)^2+b^2=225 \end{cases}$. Віднімаючи рівняння, дістанемо $a=-5, b=13$. Отже, трапеція існує (зверніть увагу на вигляд трапеції, зобразивши її вершини на площині Oxy).

20. Довести, що для довільного цілого m існує таке ціле n, що число $2m+5n$ без остачі ділиться на 7.

Достатньо вказати $n=m$.

21. Довести, що у довільному чотирикутнику різниця між сумою квадратів усіх сторін і сумою квадратів обох діагоналей є невід'ємною.

Нехай $ABCD$ – довільний чотирикутник, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{c}$, тоді $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{c}$. Знайдемо зазначену в умові різницю і розкриємо дужки: $(\vec{a})^2+(\vec{b})^2+(\vec{c})^2+(\overrightarrow{a+b+c})^2-(\overrightarrow{a+b})^2-(\overrightarrow{b+c})^2=(\vec{a}+\vec{c})^2\geq 0$, що й потрібно довести (зверніть увагу на випадок, коли зазначена в умові різниця дорівнює нулю).

22. Нехай $m,n-$ довільні цілі невід'ємні числа. Довести, що число $\underbrace{11...11}_{6m+4}3\underbrace{11...11}_{6n+4}$ без остачі ділиться на 7.

Потрібно довести, що число $\frac{10^{6m+4}-1}{9}\cdot 10^{6n+5}+3\cdot 10^{6n+4}+\frac{10^{6n+4}-1}{9}$ кратне числу 7.

Це рівносильно тому, що на 7 без остачі ділиться число $10^{6m+6n+9}-10^{6n+5}+27\cdot 10^{6n+4}+10^{6n+4}-1=10^{6m+6n+9}+18\cdot 10^{6n+4}-1$. Розглянемо остачі при діленні на 7 степенів 10: 10^1 дає остачу 3, 10^2 дає остачу 2, 10^3 дає остачу 6, 10^4 дає остачу 4, 10^5 дає остачу 5, 10^6 дає остачу 1 (найважливіший факт), тому далі остачі повторюватимуться, а число $10^{6m+6n+9}$ даватиме таку саму остачу, як і 10^3, 10^{6n+4} даватиме таку саму остачу, як і 10^4, тому остачу даного в умові числа визначатиме число $6+18\cdot 4-1=77$, яке кратне 7.

23. Довести, що число $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ є цілим, і знайти його.

Позначивши $x = a + b$, де $a, b -$ зазначені в умові кубічні корені, дістанемо $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. З огляду на те, що $a^3 + b^3 = 18,\ ab = 1$, отримаємо рівність $x^3 = 18 + 3x$.

Розкладаючи на множники, матимемо:
$x^3 - 3x - 18 = x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 6x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6)$, звідки $x = 3$, бо квадратне рівняння не має дійсних коренів.

24. Нехай $S -$ площа трикутника, $r -$ радіус вписаного у нього кола і $S = 3\sqrt{3}r^2$. Довести, що трикутник рівносторонній.

З формули Герона для площі та формули для радіуса вписаного кола дістанемо:
$(a+b+c)^2 = 12\sqrt{3} \cdot S,\ (a+b+c)^4 = 144 \cdot 3 \cdot S^2 = 144 \cdot 3 \cdot (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$
звідки $\dfrac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$. Тепер з нерівності Коші для трьох чисел вийде $a = b = c$, що й потрібно довести.

25. Довести, що існує нескінченно багато прямих, кожна із яких має єдину спільну точку з кожним графіком $y = 4 - x^2$ та $y = x^2 - 4x + 6$. Знайти рівняння кожної із таких прямих.

Ясно, що всі прямі, які паралельні до осей симетрії парабол, перетинатимуть кожну з них рівно в одній точці, і рівняння таких прямих матиме вигляд $x = a$, де $a -$ довільне число. Тому існує нескінченно багато шуканих прямих. Знайдемо ще прямі, рівняння яких має вигляд $y = ax + b$. За умовою кожне з рівнянь $4 - x^2 = ax + b$ та $x^2 - 4x + 6 = ax + b$ має єдиний корінь, тому обидва дискримінанти дорівнюють нулю. Тому $\begin{cases} a^2 - 4b + 16 = 0 \\ a^2 + 8a + 16 + 4b - 24 = 0 \end{cases}$. Додавши ці рівності, дістанемо $a^2 + 4a + 4 = 0$, звідки $a = -2,\ b = 5$, і пряма $y = -2x + 5 -$ ще одна шукана пряма.

26. У трикутнику ABC висота BH ділиться бісектрисами, проведеними з двох інших вершин, у відношенні $13:12$ та $13:5$, рахуючи від вершини B. Знайти величину кута B.

Нехай $N, M-$ точки на висоті BH, через які проходять бісектриси кутів A, C відповідно. Тоді за властивістю бісектриси у прямокутних трикутниках BHA і BHC дістанемо співвідношення $\frac{AB}{AH}=\frac{BN}{NH}=\frac{13}{5}, \frac{CB}{CH}=\frac{BM}{MH}=\frac{13}{12}$. Із цих самих трикутників, знаючи гіпотенузу і катет, знайдемо інший катет, отримуючи $AH=5t, AB=13t, BH=12t$ і $CH=12s, BC=13s, BH=5s$. Звідси вийде, що $12t=5s$, тому $AB=13t=\frac{65}{5}t, BC=13\cdot\frac{12}{5}t=\frac{156}{5}t, AC=5t+12s=\frac{169}{5}t$. Зважаючи на те, що $65^2+156^2=169^2$, дістанемо $AB^2+BC^2=AC^2$, тому кут $B-$ прямий.

27. Описати всі опуклі чотирикутники, в кожному з яких різниця між сумою квадратів усіх сторін і сумою квадратів обох діагоналей є найменшою.

Нехай $ABCD$ – довільний чотирикутник, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{c}$, тоді $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{c}$. Знайдемо зазначену в умові різницю і розкриємо дужки: $(\vec{a})^2+(\vec{b})^2+(\vec{c})^2+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2-(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{b}+\vec{c})^2=(\vec{a}+\vec{c})^2\geq 0$. Найменшим це число буде тоді, коли чотирикутник є паралелограмом.

28. У десятковому записі числа $\frac{8}{13}$ знайти цифру, яка стоїть під номером 2010 після коми.

Оскільки $\frac{8}{13}=0,(615384)$, то перша цифра 6 збігається з цифрами під номерами $1+6, 1+2\cdot 6, ..., 1+n\cdot 6$. Оскільки $1+6\cdot 334=2005$, то цифра з номером 2005 дорівнює 6, а шукана цифра дорівнює 4.

Приклади задач для 10-го класу

29. Розв'язати нерівність $\sin 2x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

За означенням синуса дістанемо $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, тому після ділення на 2 дістанемо відповідь: x належить об'єднанню всіх проміжків вигляду $[\frac{2\pi}{3} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n]$, де $n -$ довільне ціле число.

30. Знайти висоту правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює стороні основи, а об'єм дорівнює $18\sqrt{2}$.

Позначимо через a сторону основи піраміди, тоді висота основи дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, площа основи дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, радіус вписаного кола – двом третім висоти, тому за теоремою Піфагора дістанемо висоту піраміди $H = \sqrt{a^2 - (\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2})^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. З формули об'єму піраміди вийде $a = 6$, тому $H = 2\sqrt{6}$.

31. Скільки розв'язків має рівняння $|2x+2| - |x-1| - |x| = a$ залежно від значення параметра a?

Запишемо рівняння у вигляді рівносильної системи $\begin{cases} y = |2x+2| - |x-1| - |x|, \\ y = a, \end{cases}$ (попередні дві коми не потрібні) і побудуємо графік першої функції, розглянувши чотири проміжки числової прямої, утворені точками $-1, 0$ та 1. Дістанемо ламану, яка проходить через точки зламу $A(-1;-3), B(0;1), C(1;3)$, і довільні точки при $x < -1$ та $x > 1$, наприклад $M(-2;-7), N(2;3)$. Проводячи пряму $y = a$ паралельно до осі Ox, отримаємо відповідь: при $a < 3$ рівняння має єдиний розв'язок, при $a \ge 3$ рівняння має безліч розв'язків.

32. Нехай $C-$ прямий кут трикутника ABC, висота CH і бісектриса BD якого перетинаються в точці N. Знайти відношення $BN:DN$, якщо $AB=5, AC=3$.

Знайдемо $CH=\dfrac{12}{5}$, обчисливши площу трикутника ABC двома різними способами, і $BH=\dfrac{16}{5}$ за теоремою Піфагора. Використавши теорему про те, що бісектриса ділить протилежну сторону пропорційно до прилеглих сторін, з трикутників ABC і BCH знайдемо, що $CD:DA=4:5, CN:NH=5:4$. Звідси вийде, що $CD=\dfrac{4}{3}$, $NH=\dfrac{16}{15}$. За теоремою Піфагора знайдемо $BN=\dfrac{16\sqrt{10}}{15}$, $BD=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$. Звідси $ND=\dfrac{4\sqrt{10}}{15}$, а шукане відношення дорівнює $5:1$.

33. Нехай $A,B,C,D,M-$ довільні точки простору. Довести, що вираз $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AM}$ не залежить від положення точки M.

Позначимо $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{c}, \overrightarrow{AM}=\vec{x},$ тоді за правилом додавання векторів дістанемо $\overrightarrow{BM}=-\vec{a}+\vec{x}, \overrightarrow{CM}=-\vec{b}+\vec{x}, \overrightarrow{DM}=-\vec{c}+\vec{x},$ звідки знайдемо заданий в умові вираз: $\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{a})-(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})+(\vec{x}-\vec{b})\cdot(\vec{x}-\vec{c})-(\vec{x}-\vec{c})\cdot\vec{x}$. Використавши властивості скалярного добутку, дістанемо вираз $\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}$, який не залежить від положення точки M, що й потрібно довести.

34. Кожен із трьох ненульових векторів перпендикулярний до суми двох інших. Довести, що кожні два вектори – перпендикулярні.

Маємо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, для яких справджуються рівності $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=0,$ $\vec{b}(\vec{a}+\vec{c})=0,$ $\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})=0.$ Віднявши від першої рівності другу і третю, дістанемо $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c},$ звідки, повертаючись до початкових рівностей, отримаємо $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}=0$, тобто кожні два вектори є перпендикулярними.

35. Нехай в опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, а площі трикутників ABO, BCO, CDO дорівнюють відповідно $5,4,6$. Знайти площу чотирикутника $ABCD$.

Доведемо, що добутки площ протилежних трикутників, утворених від перетину діагоналей опуклого чотирикутника, дорівнюють один одному. Для цього знайдемо площі $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha$, $S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin\alpha$, $S_{\triangle CDO}=\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\alpha$, $S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}AO\cdot DO\cdot\sin\alpha$. Тут $\sin\alpha$ не залежить від того, який саме кут між діагоналями взято, бо $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$. Перемноживши площі протилежних трикутників, бачимо, що добутки однакові.

Доведене співвідношення між площами дає змогу знайти площу четвертого трикутника, отже, й площу чотирикутника.

36. Нехай n – натуральне число і остання цифра числа n^2+6n дорівнює 6. Знайти передостанню цифру числа n^2+6n.

Нехай a – остання цифра числа n, тоді вона парна, і, перебравши добутки $a(a+6)$ при $a=0,2,4,6,8$, бачимо, що лише при $a=2$ дістанемо останню цифру 6. Ясно, що на передостанню цифру числа n^2+6n впливає тільки передостання цифра числа n, тому можна вважати, що $n=10m+2$. Отже, $n^2+6n=(10m+2)(10m+8)=100m^2+100m+16$. Бачимо, що передостання цифра числа n^2+6n дорівнює 1.

37. У трикутній піраміді $ABCD$ усі шість ребер мають однакову довжину. Всередині піраміди існує точка M, для якої $MA=MB=\sqrt{2},\ MC=MD=\sqrt{6}$. Знайти довжину ребра піраміди.

Довільна піраміда, зазначена в умові, задається деяким числом, $a>0$, і вершинами піраміди будуть $A(0;0;0), B(a;a;0), C(a;0;a), D(0;a;a)$. З умови задачі отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ (x-a)^2+(y-a)^2+z^2=2 \\ x^2+(y-a)^2+(z-a)^2=6 \\ (x-a)^2+y^2+(z-a)^2=6 \end{cases}.$$

Віднявши перші два рівняння й останні два, дістанемо значення $x=y=\frac{a}{2}$, які підставимо у перше і третє рівняння системи, отримуючи рівності $z^2=2-\frac{a^2}{2}$

і $(z-a)^2=6-\frac{a^2}{2}$, звідки, віднявши дві останні рівності, дістанемо $z=\frac{a^2-4}{2a}$, тому $\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}=\frac{4-a^2}{2}$. Ясно, що або $a^2=4$, або $a^2=\frac{4}{3}$. У першому випадку точка $M(1,1,0)$ лежить на ребрі AB піраміди, а в другому – точка $M(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}})$ лежить за межами піраміди, тому дістанемо єдине значення $a=2$, отже, ребро піраміди дорівнюватиме $a\sqrt{2}=\sqrt{8}$.

38. На координатній площині Oxy схематично зобразити множину точок, для координат $(x;y)$ яких справджується рівність $|y|+x^2=\sqrt{|x|-|y|}$.

Важливо відзначити, що шукана фігура симетрична відносно обох осей координат, отже, можна розглянути лише випадок $x\ge 0$ і $y\ge 0$. Тоді цю рівність можна записати у вигляді $(y+x^2)^2=x-y$, де $0\le y\le x$. Розв'язуючи квадратне рівняння відносно y, дістанемо $y=-x^2+x$ або $y=-x^2-x-1$. У другому випадку $y<0$, тому він не стосується задачі. У першому випадку нерівність $0\le y\le x$ правильна, якщо $0\le x\le 1$, $y=-x^2+x$. Щоб закінчити розв'язання, потрібно дугу параболи $y=-x^2+x$ при $0\le x\le 1$ відобразити симетрично відносно обох осей координат (вийде фігура, схожа на символ нескінченності).

40. Будемо до числа 12 додавати послідовно багато разів число 9. Чи вийде коли-небудь число 2010?

Маємо $12+9n=2010$, звідки $n=222$. Відповідь позитивна.

41. Побудувати графік $y=\sqrt{2x-x^2}$.

Маємо $y^2=2x-x^2$, де $y\ge 0$. Тому графіком буде верхнє півколо $(x-1)^2+y^2=1$.

42. Знайти найменше і найбільше значення виразу $x+y$, якщо $9x^2+4y^2=1$. Позначимо $x=\frac{\cos t}{3}$, $y=\frac{\sin t}{2}$, аналогічно до означення синуса і косинуса. Тоді

$x+y=\frac{1}{6}(2\cos t+3\sin t)=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{13}(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t+\frac{3}{\sqrt{13}}\sin t)=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{13}\cos(t+\alpha)$. Звідси відповідь: $-\frac{\sqrt{13}}{6}\le x+y\le\frac{\sqrt{13}}{6}$.

43. Довести, що для довільного цілого m існує таке ціле n, що число $2m+3n$ без остачі ділиться на 7.

Розглядатимемо остачі при діленні на 7:
$m\equiv 0, n\equiv 0;\ m\equiv 1, n\equiv 4;\ m\equiv 2, n\equiv 1;\ m\equiv 3, n\equiv 5;\ m\equiv 4, n\equiv 2;\ m\equiv 5, n\equiv 6;\ m\equiv 6, n\equiv 3.$
У будь-якому випадку число n існує (воно просто зазначене).

44. Знайти всі пари простих чисел (x, y), для яких $5x^2-7x+1=y^2$.

Маємо $x(5x-7)=(y-1)(y+1)$, звідки маємо два випадки, коли $y=kx\pm 1$. Звідси $x=\frac{\pm 2k+7}{5-k^2}$. Чисельник – лінійна функція, тому її модуль менший за модуль знаменника при достатньо великих значеннях x, які легко оцінити. Далі – невеликий перебір. Відповідь: $x=11$ або $x=3$.

45. Нехай $a, b, c-$ сторони трикутника, $\alpha, \beta, \gamma-$ протилежні внутрішні кути відповідно і $\frac{a}{\cos\gamma+2\cos\beta}=\frac{b}{\cos\gamma+2\cos\alpha}$. Довести, що трикутник рівнобічний або прямокутний.

За теоремою синусів дістанемо $\cos\gamma\sin\beta+\sin 2\beta=\sin\alpha\cos\gamma+\sin 2\alpha$. За формулою різниці синусів отримаємо $\cos\gamma(\sin\beta-\sin\alpha)=2\cos\gamma\sin(\beta-\alpha)$, а потім $\cos\gamma\cdot 2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=4\cos\gamma\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$. Звідси й дістанемо потрібне, бо рівність $\cos\frac{\beta+\alpha}{2}=2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ рівносильна рівності $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$, яка неможлива.

46. Скількома способами можна розбити на пари 16 футбольних команд?

Позначимо через a_n шукану кількість розбиттів на пари $2n$ команд. Тоді для першої команди є $2n-1$ способів дібрати пару. А решту $2n-2$ команд можна розбити на пари a_{n-1} способами. Ясно, що $a_n=(2n-1)\cdot a_n$, тому $a_8=15\cdot a_7=15\cdot 13\cdot a_6=15\cdot 13\cdot 11\cdot a_5=...=15\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3=2027025$.

47. Схематично зобразити графік $y=\frac{4x^2+2|x|}{x+\sqrt{x^2}}$.

Функція визначена лише при $x>0$, і тоді $y=2x+1$ (промінь при $x>0$).

48. Знайти найменше і найбільше значення виразу $L=\frac{3x+y-7}{2x+y-5}$, якщо $\begin{cases}3\le x\le 4\\1\le y\le 2\end{cases}$.

Оскільки $L=1+\frac{x-2}{2x+y-5}$, достатньо оцінити $l(y)=\frac{x-2}{2x+y-5}$ на проміжку $[1;2]$. Ця спадна величина набуває всіх значень від $l(2)=\frac{x-2}{2x-3}$ до $l(1)=\frac{x-2}{2x-4}=\frac{1}{2}$.

Залишається знайти найменше значення величини $l(2)=\frac{x-2}{2x-3}=\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2x-3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x-6}$. Ясно, що ця зростаюча величина набуватиме найменшого значення при $x=3$, тобто значення $\frac{1}{3}$. Звідси й дістанемо відповідь: $L_{min}=\frac{4}{3}$ при $x=3, y=2$, $L_{\max}=\frac{3}{2}$ при $x\in[3;4], y=1$.

49. Нехай паралелограм $ABCD$ є основою піраміди $ABCDS$. Точки M, K, N лежать на ребрах SB, SD, SC відповідно і $SM:SB=1:2, SN:SC=1:4$, $SK:SD=1:3$. Чи обов'язково площина MNK проходить через точку A ? Відповідь обґрунтувати.

Введемо вектори $\overrightarrow{CD}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{SB}=\vec{c}$, тоді з умови задачі дістанемо рівності $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{SN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{SC}=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, звідки $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}$, $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$, $\overrightarrow{MK}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$. Потрібний висновок випливає з рівності $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MK}-4\overrightarrow{MN}$ (коефіцієнти $x=3, y=-4$ знаходяться з рівності $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MK}+y\overrightarrow{MN}$).

50. Побудувати графік $y=\sqrt{6x-x^2}$.

Рівність має вигляд системи $\begin{cases}(x-3)^2+y^2=9\\ y\ge 0\end{cases}$. Звідси дістанемо верхнє півколо радіуса $R=3$ з центром у точці $O(3;0)$.

51. Розв'язати нерівність $2\sqrt{x+2}\ge(x+2)(2x-3)$.

Відповідне рівняння має корені $x_1=-2, x_2=2$. З графічних міркувань дістанемо відповідь $x\in[-2;2]$.

52. Довести, що для довільного натурального числа n справджується рівність $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n)=2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n-6)\cdot(4n-2)$.

Потрібно довести, що $(n+1)(n+2)...(2n)=2^n\cdot(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))$. Рівність буде очевидною, якщо обидві її частини помножити на добуток $1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$: ліворуч і праворуч вийде добуток усіх цілих чисел від 1 до $2n$.

53. Знайти всі цілі додатні числа n, за яких рівняння $\sin x\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot\sin\frac{x}{3^2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{x}{3^n}=1$ має принаймні один розв'язок.

Позначимо $y=\frac{x}{3^n}$, тоді рівняння буде таким: $\sin y\cdot\sin 3y\cdot\sin 3^2y\cdot\ldots\cdot\sin 3^n y=1$. Звідси випливає, що $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ або $y=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$. Доданки $2\pi k$ не впливають на те, чи буде відповідне значення розв'язком. У випадку $y=\frac{\pi}{2}$ знаки множників у рівнянні чергуються так: $+,-,+,-\ldots$, тому добуток дорівнюватиме одиниці, якщо кількість знаків «-» буде парною. Це буде тоді, коли $n=4p+3$ або $n=4p$. У випадку $y=\frac{3\pi}{2}$ знаки множників у рівнянні чергуються так: $-,+,-,+,\ldots\ldots$, тому добуток дорівнюватиме одиниці, якщо кількість знаків «-» буде парною. Це буде тоді, коли $n=4p+2$. Отже, рівняння має розв'язок для довільних натуральних n, крім $n=4p+1$, де $p-$ ціле.

Приклади задач для 11-го класу

54. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x^3+2x-4}=4$.

Зауважимо, що обидві підкореневі функції монотонно зростають, отже, і функція у лівій частині рівняння є зростаючою. Тому рівняння не може мати більше одного кореня. Корінь $x=2$ легко помітити.

55. Розв'язати нерівність $\log_2(\log_{1/2}(\cos 2x)\geq -1$.

Маємо рівносильні нерівності $\log_{1/2}(\cos 2x)\geq \frac{1}{2}$ та $0<\cos 2x\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідки $\frac{\pi}{4}+2\pi n\leq x<\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{8}+\pi n\leq x<\frac{\pi}{4}+\pi n$ або $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x\leq -\frac{\pi}{4}+2\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n<x\leq -\frac{\pi}{8}+\pi n$, отже, множиною розв'язків нерівності є об'єднання всіх проміжків вигляду $[\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n)$ та $(-\frac{\pi}{4}+\pi n;-\frac{\pi}{8}+\pi n]$, де $n-$ довільне ціле число.

56. Медіана, проведена з вершини гострого кута, ділить висоту, проведену з вершини прямого кута трикутника, у відношенні 5:1, рахуючи від вершини. Знайти тангенс більшого гострого кута трикутника.

Введемо систему координат так, щоб точки $A(a;0), B(0;b), C(0;0)$ були вершинами цього трикутника, тоді $M(\frac{a}{2};0)-$ основа медіани, а точку O, яка є точкою перетину висоти CH і медіани BM, знайдемо з рівності $\overrightarrow{BO}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BM}$. Тому $O(\frac{5a}{12};\frac{b}{6})$, і з умови перпендикулярності векторів $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ дістанемо $\frac{5a}{12}\cdot a-\frac{b}{6}\cdot b=0$, звідки знаходимо відношення катетів початкового трикутника, яке дорівнює $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}>1$, тому шуканий тангенс дорівнює $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

57. Скільки різних натуральних дільників має число 81000000000?

Це число має вигляд $3^4\cdot 2^9\cdot 5^9$, тому кожен його дільник має вигляд $3^m\cdot 2^n\cdot 5^k$, де $0\leq m\leq 4, 0\leq n\leq 9, 0\leq k\leq 9$. Оскільки число m може набувати одного з п’яти значень, а кожне із чисел n і k може набувати незалежно десяти значень, то дане в умові число має $5\cdot 10\cdot 10=500$ дільників.

58. Не використовуючи ані таблиць, ані калькулятора, довести нерівність $|\log_5 2-0,43|<0,01$.

Потрібно довести, що $0,42<\log_5 2<0,44$. Щоб знайти таку оцінку, потрібно знайти достатньо близькі, достатньо великі натуральні степені чисел 2 і 5. Маємо степені числа 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536,… та степені числа 5: 5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125,… Бачимо пару близьких чисел $5^3=125$ і $2^7=128$ та $2^{16}=65536$ і $5^7=78125$. Отже, доведено нерівності $5^3<2^7$ та $2^{16}<5^7$. Знаходячи логарифм з основою 5 від лівої і правої частини кожної з них, дістанемо правильні нерівності $\frac{3}{7}<\log_5 2$ і $\log_5 2<\frac{7}{16}$. Оскільки $\frac{3}{7}=0,428...,\frac{7}{16}=0,4375$, то $0,42<0,428...<\log_5 2<0,4375<0,44$ (зауважимо, що на цьому шляху можна відшукати і точніші наближені значення логарифмів. Так, зазначені вище нерівності насправді дають змогу довести, що $|\log_5 2-0,433|<0,005$).

59. Знайти всі проміжки монотонності функції $f(x)=|x^2-2x|-2|x|$.

Розглянувши проміжки $(-\infty;0],[0;2],[2;+\infty)$, бачимо, що $f(x)=x^2$ на першому з них, $f(x)=-x^2$ – на другому і $f(x)=x^2-4x$ – на третьому проміжку. Це значить, що $f(x)$ спадає на $(-\infty;2]$ від $+\infty$ до -4, і $f(x)$ зростає на $[2;+\infty)$ від -4 до $+\infty$.

60. Скільки всього існує 7-цифрових чисел, сума цифр яких дорівнює 4?

Число 4 записується як одна із сум $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$. Це значить, що шукані числа можуть бути утворені так:

1) однією четвіркою і шістьма нулями (таке число одне, бо першою цифрою має бути 4);

2) однією трійкою, однією одиницею і п’ятьма нулями (таких чисел шість з першою одиницею і шість з першою трійкою);

3) двома двійками і п’ятьма нулями (таких чисел шість, бо одна двійка має бути першою);

4) однією двійкою, двома одиницями і чотирма нулями (якщо першою буде двійка, то місце для одиниць можна вибрати $C_6^2 = 15$ способами; якщо першою буде одиниця, то місце для другої одиниці можна вибрати шістьма способами, а місце для двійки можна вибрати п’ятьма способами, тобто дістанемо ще 30 чисел);

5) чотирма одиницями і трьома нулями (таких чисел $C_6^3 = 20$, бо місце для трьох нулів можна вибрати саме такою кількістю способів).

Зрештою, всього шуканих чисел 1+ 6 + 6 + 6 + 15 + 30 + 20 = 94.

61. Розв’язати нерівність $\log_{\frac{3}{\pi}}(\log_{\frac{1}{2}}(x-1)) \ge 0$.

Маємо ланцюжок рівносильних нерівностей:

$0 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)) \le 1, \log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \le x-1 < 1, \frac{3}{2} \le x < 2$, тобто $x \in [1,5;2)$.

62. Скільки точок перетину з графіком функції $y = x^3 - 3x$ має дотична, проведена до нього у точці $(2;2)$?

Переконуємось, що точка $(2;2)$ лежить на графіку функції $y = x^3 - 3x$, і знаходимо рівняння дотичної до нього при $x_0 = 2$. Дістанемо рівняння $y = 9x - 16$. Розв’язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 9x - 16 \end{cases}$, отримаємо $x^3 - 3x = 9x - 16$, звідки $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = -2$. Отже, графіки перетинаються у двох точках.

63. Є паралелограм зі сторонами 5 і 12. Яких значень може набувати довжина його більшої діагоналі?

Для діагоналей паралелограма маємо систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 + 288 = 338 \\ x \le y \end{cases}$, тому $338 = x^2 + y^2 \le 2y^2$, тому $y \ge 13$. З нерівності трикутника випливає, що $y < 5 + 12$, тому $13 \le y < 17 -$ відповідь.

64. Чи можуть усі діагоналі опуклого шестикутника бути рівними за довжиною? Відповідь обґрунтувати.

З умови задачі випливає, що існує опуклий чотирикутник $ACDF$, в якому трикутники ACF і ADF – однакові рівнобедрені трикутники зі спільною основою. Так не буває.

65. Нехай $ABCD-$ трикутна піраміда, в якій $E,F-$ середини ребер AB і CD відповідно, $DE \perp CE, AF \perp BF$. Довести, що $AB = CD$.

Маємо прямокутні трикутники з однаковими медіанами, проведеними з вершини прямого кута. Оскільки така медіана дорівнює радіусу описаного кола і дорівнює половині гіпотенузи, дістанемо $EF = \frac{1}{2}CD, EF = \frac{1}{2}AB,$ тому $AB = CD$.

66. Нехай $ABCD-$ такий опуклий чотирикутник, що $\angle BAC = \angle BDC = 70^\circ, \angle ABC = 37^\circ.$ Знайти величину $\angle BDA$.

Навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло, бо в колі, описаному навколо трикутника ABC, кути $\angle BAC$ і $\angle CDB$ спираються на одну й ту саму дугу. Позначимо $\angle BDA = \angle BCA = \alpha, \angle ACD = \angle ABD = \beta, \angle DAC = \angle DBC = \gamma,$ тоді із системи $\begin{cases} \beta + \gamma = 37^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma + 70^\circ = 180^\circ \end{cases}$ дістанемо $\alpha = 73^\circ$ – шуканий кут.

67. Знайти найменше значення $|f'(x)|$, якщо $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 4x$, $x \in (-\infty; 0]$.

Побудуємо графік $y = |f'(x)| = 4|x^3 + 6x^2 + 9x - 1|$. Для цього побудуємо спочатку графік $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$. Маємо $y' = 3(x^2 + 4x + 3)$, отже, $y' = 0$ при $x = -1$ та $x = -3$. Отже, функція y зростає від $-\infty$ до -1 на проміжку $(-\infty; -3]$, спадає від -1 до -5 на проміжку $[-3; -1]$, зростає від -5 до -1 на проміжку $[-1; 0]$. Звідси відповідь: найменше значення $|f'(x)|$ дорівнює 1, і досягається воно при $x = 0$ і $x = -3$.

68. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sin 5x - 5\sin x$.

Достатньо знайти ці значення на $[0;2\pi]$. Маємо $f'(x)=5\cos 5x-5\cos x$, тоді $f'(x)=0$, якщо $\cos 5x=\cos x$, тобто $x=\frac{\pi n}{3}$ або $x=\frac{\pi n}{2}$. Зазначеному проміжку належать $x=0, x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{2\pi}{3}, x=\pi, x=\frac{4\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}, x=\frac{3\pi}{2}, x=2\pi$. Знайшовши значення у кожній точці, знайдемо найменше значення $f(\frac{\pi}{3})=f(\frac{2\pi}{3})=-3\sqrt{3}$ та найбільше значення $f(\frac{4\pi}{3})=f(\frac{5\pi}{3})=3\sqrt{3}$.

69. Знайти довжину бісектриси більшого гострого кута прямокутного трикутника з гіпотенузою 6 см і катетом 3 см.

Оскільки гіпотенуза удвічі більша за катет, то більший гострий кут трикутника дорівнює 60°. Отже, потрібно знайти бісектрису кута 60°. Тобто знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, в якому катет, прилеглий до кута 30°, дорівнює 3. Відповідь: $2\sqrt{3}$.

70. Розв'язати рівняння $[\sqrt{x^2+x+1}]=x$, де $[a]-$ ціла частина числа a, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує a.

Оскільки ліворуч – ціле додатне число, то $x-$ціле додатне число. Для таких чисел правильною є нерівність $x<\sqrt{x^2+x+1}<x+1$. Тому задана в умові рівність правильна за довільних цілих додатних значень x.

71. Довести, що для довільного натурального $n\geq 2$ існує n таких натуральних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ (не обов'язково різних), що їх сума дорівнює їхньому добутку.

Шуканими числами є числа 1,1,…,1 ($n-2$ одиниці), число 2 і число n. Тобто $x_1=x_2=...=x_{n-2}=1, x_{n-1}=2, x_n=n.$

72. Чи існують прямий круговий циліндр і куля, що мають однакові об'єми і повні площі поверхонь? Відповідь обґрунтувати.

Нехай $R-$ радіус кулі, а r, h – радіус основи і висота циліндра. Тоді йдеться про існування додатних розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} 4\pi R^2=2\pi r^2+2\pi rh \\ \frac{4}{3}\pi R^3=\pi r^2 h \end{cases}$.

Знайшовши h із другого рівняння, підставимо його в перше і поділимо отриману рівність на R^3. Вийде кубічне рівняння $3x^3-6x+4=0$ відносно невідомого $x=\dfrac{r}{R}$.

Чи має це рівняння додатний корінь? Оскільки $y'=0$ при $9x^2=6$ і при $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ліва частина рівняння досягає найменшого значення $4-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=\dfrac{4(3-\sqrt{6})}{3}>0$, то рівняння не має жодного додатного кореня, і шуканих кулі і циліндра не існує.

73. Нехай a,b,c – такі цілі числа, що $3a+7b+8c=0$ і число $4b+c$ без остачі ділиться на 5. Довести, що число $22a+3b+7c$ без остачі ділиться на 25.

Насправді достатньо довести, що число $-3a+3b+7c$ ділиться на 25, а з огляду на першу рівність довести, що $7b+8c+3b+7c=10b+15c$ ділиться на 25. Це рівносильно тому, що $2b+3c$ ділиться на 5. Виходячи з того, що $4b+c$ ділиться на 5, а $2b+3c=3(4b+c)-10b$, отримаємо потрібне.

74. За яких значень параметра a рівняння $ax^2+(2-a)x-2=0$ має єдиний дійсний корінь?

Якщо $a=0$, рівняння має єдиний корінь $x=1$, а за інших значень квадратному рівнянню належить мати нульовий дискримінант, тобто $a=-2$.

75. Периметр трикутника при діленні на кожну його сторону дає цілі числа. Знайти ці числа.

Нехай $a\le b\le c$, тоді з нерівності трикутника вийде $a+b>c$. Оскільки $2=\dfrac{c+c}{c}<\dfrac{a+b+c}{c}\le\dfrac{3c}{c}=3$, то число $\dfrac{a+b+c}{c}$ – ціле число з проміжку (2;3]. Тому $\dfrac{a+b+c}{c}=3$, що можливо лише у випадку $a=b=c$, отже, всі три шукані числа дорівнюють 3.

76. У скількох точках перетинаються графіки $y=\log_2(x-1)$ і $y=x^2-2x-8$?

Вершина параболи знаходиться на асимптоті логарифмічної функції $y = \log_2(x-1)$, тому корені можуть бути лише при $x > 1$. Майже тривіально, що їх рівно два.

77. Скільки різних за довжиною діагоналей має правильний семикутник?

Семикутник має вісь симетрії, яка проходить через вершину і середину протилежної сторони. Тому з кожної вершини виходить по дві пари однакових за довжиною діагоналей. Відповідь: дві.

78. Чи правда, що всі розв’язки системи рівнянь $\begin{cases} \sin(6y-10x)=1, \\ \cos(2y-3x)=0. \end{cases}$ задаються формулами $\begin{cases} x=\pi+\pi m, \\ y=\dfrac{7\pi}{4}+\pi n. \end{cases}$ де $m,n-$ довільні цілі числа? Відповідь обґрунтувати.

Перевірка того, що зазначені числа є розв’язками системи рівнянь, не становить проблеми. Ясно, що для довільного розв’язку системи справджуються рівності:

$$\begin{cases} 6y-10x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi s, \\ 2y-3x=\dfrac{\pi}{2}+\pi r, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x=\pi-2\pi s+3\pi r, \\ y=\dfrac{7\pi}{4}-3\pi s+5\pi r. \end{cases}$$

Отже, потрібно довести, що для довільних цілих m,n знайдуться такі цілі s,r, для яких $\begin{cases} 3r-2s=m \\ 5r-3s=n \end{cases}$. Для цього достатньо розв’язати останню систему: $r=2n-3m, s=3n-5m.$

79. Навести приклад цілого додатного числа, в якого рівно одинадцять натуральних дільників.

Таким числом буде, наприклад, $1024=2^{10}$, бо його дільниками будуть лише числа вигляду 2^m, де $m=0,1,2,...,10$.

80. Побудувати переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через деяку точку бічного ребра, точку перетину медіан протилежної бічної грані і через центр основи.

Оскільки три точки визначають площину перерізу, достатньо вгадати переріз. Ним буде трикутник, який проходить через зазначене бічне ребро, висоту основи і висоту відповідної бічної грані.

81. Медіана CM і висота BN трикутника ABC перетинаються в точці O. Пряма AO перетинає сторону BC в точці K. Довести, що $\dfrac{BO}{ON} = \dfrac{AO}{OK}$.

Введемо систему координат $A(-a;0), N(0;0), C(c;0), B(0;b), M(-\frac{a}{2},\frac{b}{2}), O(0;d)$. Оскільки точки C,O,M лежать на одній прямій, то координати векторів $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{MC}$ пропорційні, звідки $\dfrac{c+\frac{a}{2}}{c} = \dfrac{-\frac{b}{2}}{-d}$, тому $2cd + ad = bc$.

Оскільки точка $K(x;y)$ лежить на прямих BC і AO, її координати знайдемо з умов пропорційності координат векторів $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AK}$ та $\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CB}$. Дістанемо систему рівнянь $\begin{cases} dx - ay + ad = 0 \\ bx + cy - bc = 0 \end{cases}$, з якої вийде $x = \dfrac{ac(b-d)}{ab+cd}$.

Позначивши через P проекцію точки K на AB, дістанемо, що потрібно довести рівність $\dfrac{BO}{ON} = \dfrac{AN}{NP}$, тобто $\dfrac{b-d}{d} = \dfrac{a}{x} = \dfrac{a(ab+cd)}{ac(b-d)}$. Ця рівність після очевидних спрощень набуде вигляду $2cd + ad = bc$. Оскільки цю рівність доведено раніше, твердження є доведеним (задача розв’язується і геометрично).

82. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \log_2 x + \log_x 16 + 4$, якщо $\frac{1}{8} \le x < 1$.

Маємо функцію $y(t) = t + \dfrac{4}{t} + 4$, де $-3 \le t < 0$. Похідна $y'(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$, отже, функція $y(t)$ зростає на $(-3;-2)$ і спадає на $(-2;0)$, тому її найбільшого значення $y(-2) = 0$ вона досягає при $t = -2$, тобто при $x = \dfrac{1}{4}$.

83. Відомо, що числа $p, q, q+3, 7p+5q, p-5q -$ додатні, прості, попарно різні цілі числа. Знайти p і q.

Оскільки числа q і $q+3$ прості й одне із них парне, то $q=2$. Отже, потрібно знайти додатне просте число p, для якого простими є всі три числа $p, 7p+10, p-10$. Ці числа дають різні остачі при діленні на 3, тому одне з них дорівнює трьом. Таким числом не можуть бути p (тоді $p-10<0$) і $7p+10$ (тоді $p<0$). Отже, $p-10=3, p=13$, і перевірка свідчить, що знайдені числа $p=13, q=2$ справді є розв'язками задачі.

84. Чи правда, що $\log_2 5 < \frac{7}{3}$? Відповідь обґрунтувати.

Маємо рівносильні нерівності $\log_2 5 < \log_2 2^{\frac{7}{3}}, 5 < 2^{\frac{7}{3}}, 5^3 < 2^7$.

85. Знайти площу трикутника з вершинами у точках $A(2;3), B(5;1), C(3;7)$.

Помістимо трикутник усередину прямокутника, сторони якого проходять через вершини трикутника і паралельні до осей координат. Тоді шукана площа дорівнює різниці площі прямокутника і суми площ трьох прямокутних трикутників.

86. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=\cos 5x - 5\cos x$.

Зважаючи на періодичність і парність функції, достатньо знайти ці значення на $[0;\pi]$. Маємо $f'(x)=-5\sin 5x + 5\sin x$, тоді $f'(x)=0$, якщо $\sin 5x = \sin x$, тобто $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$ або $x=\frac{\pi n}{2}$. Зазначеному проміжку належать $x=0, x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{5\pi}{6}, x=\pi$. Знайшовши значення у кожній точці, знайдемо найменше значення $f(\frac{\pi}{6})=-3\sqrt{3}$ та найбільше значення $f(\frac{5\pi}{6})=3\sqrt{3}$.

87. Нехай n – довільне ціле додатне число. Довести, що $\underbrace{11...11...1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22...22}_{n \text{ цифр}} = (\underbrace{33...33}_{n \text{ цифр}})^2$.

Маємо $\frac{10^{2n}-1}{9} - \frac{2(10^n-1)}{9} = (\frac{10^n-1}{3})^2$.

88. Довести, що число $n(n+1)(n+6)(n+9)(n+10)(n+12)+1296$ є квадратом деякого цілого числа при довільному цілому значенні n.

Згрупувавши перший, четвертий і п'ятий та другий, третій і шостий множники, розкриємо дужки. Дістанемо:

$$(n^3+19n^2+90n)(n^3+19n^2+90n+72)+1296=(n^3+19n^2+90n+36)^2.$$

89. Розв'язати рівняння $\sin(\pi x)=\frac{11}{16}-\frac{27}{4}x^2$.

З нерівності $-1\le\frac{11}{16}-\frac{27}{4}x^2\le 1$ дістанемо $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$. На проміжку $[-\frac{1}{2};0]$ ліва і права частини рівняння зростають, але мають різний характер опуклості, тому існує не більше одного кореня. На проміжку $[0;\frac{1}{2}]$ ліва частина зростає, а права – спадає, тому також існує не більше одного кореня. Два корені легко знайти: $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{6}$.

90. Бісектриса AK, висота BN і медіана CM трикутника ABC перетинаються в точці O і $BO:ON=2:1$. Довести, що трикутник ABC рівносторонній.

Нехай P – проекція точки M на AC, тоді $\frac{MC}{CO}=\frac{MP}{ON}=\frac{3BN}{2BN}=\frac{3}{2}$, тому O – точка перетину медіан трикутника. Звідси випливає, що AK, BN – медіани, отже, трикутник ABC правильний.

91. Знайти таке число a, щоб рівняння $2^{2x+1}+\sqrt{2}=a\cdot 2^x(\cos\pi x-\sin\pi x)$ мало єдиний корінь. Знайти цей єдиний корінь.

Припустимо, що x – розв'язок рівняння, тоді $\cos\pi x-\sin\pi x=\frac{2^{2x+1}+\sqrt{2}}{a\cdot 2^x}$.

Замінимо x на $-x-\frac{1}{2}$ і доведемо, що рівність не порушиться. Так буде тоді, коли $2^{-2x}+\sqrt{2}=a\cdot 2^{-x-\frac{1}{2}}(\cos(-\pi x-\frac{\pi}{2})-\sin(-\pi x-\frac{\pi}{2}))$, тобто $\cos\pi x-\sin\pi x=\frac{2^{-2x}+\sqrt{2}}{a\cdot 2^{-x-\frac{1}{2}}}$.

Оскільки $\frac{2^{-2x}+\sqrt{2}}{a\cdot 2^{-x-\frac{1}{2}}}=\frac{(2^{-2x}+\sqrt{2})\cdot 2^{2x+\frac{1}{2}}}{a\cdot 2^{-x-\frac{1}{2}}\cdot 2^{2x+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}+2^{2x+1}}{a\cdot 2^x}$, доведено, що x та $-x-\frac{1}{2}$ одночасно є розв'язками. Отже, $-x-\frac{1}{2}=x, x=-\frac{1}{4}$. Саме при цьому значенні x

дістанемо $a = 2\cdot\sqrt[4]{2}$. Навпаки, нехай $a = 2\cdot\sqrt[4]{2}$, тоді початкове рівняння набуде вигляду $\cos\pi x - \sin\pi x = \dfrac{2^{2x+1}+\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{2}\cdot 2^x} \le \sqrt{2}.$ Звідси $(\sqrt{2}\cdot 2^x - \sqrt[4]{2})^2 \le 0$, тому $x = -\dfrac{1}{4}$ – єдиний розв’язок.

92. Чи можна квадрат зі стороною 10 см повністю накрити кругом радіуса 7 см?

Радіус описаного кола для такого квадрата дорівнює $5\sqrt{2}$ і $5\sqrt{2} > 7$, бо $50 > 49$, тому накрити не вийде.

93. Скільки точок перетину може утворитися всередині опуклого шестикутника, якщо провести всі його діагоналі?

Якщо «великі» діагоналі перетинаються в одній точці, всього точок буде 13, а якщо ні, то 15.

94. Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 3 і 7, а бічні сторони дорівнюють 13 і 15.

Найпростіше ввести систему координат, узявши за її вершини точки $A(0;0), B(a;b), C(a+3;b), D(7;0)$. Знайшовши довжини бічних сторін, дістанемо систему рівнянь $\begin{cases} a^2+b^2=169 \\ (a-4)^2+b^2=225 \end{cases}$. Звідки $a=-5, b=12$ (можна вважати, що $b>0$). Це означає, що висота трапеції дорівнює 12, а її площа 60 (кв. од.).

95. Яким має бути параметр *a*, щоб рівняння $ax^2-3x+1=0$ мало єдиний корінь?

Якщо $a=0$, то $x=\frac{1}{3}$, якщо $a\ne 0$, то $D=0$, звідки $a=\dfrac{9}{4}$, і $x=\dfrac{2}{3}$ – єдиний корінь.

96. Знайти прямокутник з найбільшою площею, вершини якого лежать на сторонах прямокутного трикутника з катетами 6 і 8. Скільки розв’язків має задача?

Прямокутник може мати спільний прямий кут із трикутником і може мати сторону, паралельну до гіпотенузи трикутника.

У першому випадку з подібності трикутників дістанемо $\frac{8-a}{b}=\frac{a}{6-b}$, де $a,b-$ сторони прямокутника. Тому $a=8-\frac{4}{3}b, S=ab=8b-\frac{4}{3}b^2$. Отже, $S'=0$, якщо $b=3$. Найбільша площа дорівнює 12. У другому випадку з подібності трикутників вийде $\frac{x}{b}=\frac{8}{6}, \frac{y}{b}=\frac{6}{8}$, де $x,y-$ частини гіпотенузи біля вершин гострих кутів трикутника. Тому $a=10-\frac{4}{3}b-\frac{3}{4}b=10-\frac{25}{12}b, S=ab=10b-\frac{25}{12}b^2$. Отже, $S'=0$, якщо $b=\frac{12}{5}$. Найбільша площа дорівнює 12. Отже, задача має два різних розв'язки.

97. Довести, що число $\underbrace{4...4...44}_{2n \text{ цифр}}-\underbrace{88...88}_{n \text{ цифр}}$ є квадратом цілого числа, і знайти це число.

Маємо $\frac{4(10^{2n}-1)}{9}-\frac{8(10^n-1)}{9}=(\frac{2\cdot(10^n-1)}{3})^2$ – квадрат числа $\underbrace{66...66}_{n \text{ цифр}}$.

98. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{1-x^4}=\sqrt[5]{1-x^5}$.

Позначимо $y=\sqrt[4]{1-x^4}=\sqrt[5]{1-x^5}$, дістаючи систему $\begin{cases} x^4+y^4=1 \\ x^5+y^5=1 \end{cases}$, де $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$.

Якщо $x<1$ чи $y<1$, то $1=x^5+y^5<x^4+y^4=1$, що неможливо, тому $x=1$.

99. Яких значень може набувати вираз $\cos(5x+y)\cdot\cos(x+5y)-3\cos 2x\cdot\cos 2y$?

Маємо вираз $\frac{1}{2}\cos(6x+6y)+\frac{1}{2}\cos(4x-4y)-\frac{3}{2}\cos(2x+2y)-\frac{3}{2}\cos(2x-2y)$. Оскільки змінні $u=2x+2y$ та $v=2x-2y$ можуть набувати довільних значень незалежно, йдеться про можливі значення двох функцій $f(u)=\cos 3u-3\cos u$ і $g(v)=\cos 2v-3\cos v$. Далі – стандартні задачі про найменше і найбільше значення функції на проміжку.

100. Знайти всі трійки дійсних чисел (x,y,z), щоб $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4 \\ z^4+yz^2+xz+1=0 \end{cases}$.

Виконаємо заміну $x = 2\cos\alpha, y = 1 + 2\sin\alpha$, тоді з другого рівняння вийде $2z^2 \sin\alpha + 2z\cos\alpha = -z^4 - z^2 - 1$. Таке рівняння має розв'язок тоді й лише тоді, коли $(-z^4 - z^2 - 1)^2 \le (2z^2)^2 + (2z)^2$, тобто $(z^4 + z^2 - 1)^2 \le 0$. Це значить, що $z^4 + z^2 - 1 = 0$, отже, $z^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Дістанемо $z^2 \sin\alpha + z\cos\alpha = -1$, звідки $\cos\alpha = -z$, $\sin\alpha = -z^2$, тому $x = -2z, y = 1 - 2z^2$. Система має два розв'язки.

Зміст

Передмова. Про контрольну роботу з математики на Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН у 2010–2011 навчальному році ……………..... 3

Приклади задач для 9-го класу…………………….…...……………. 4

Приклади задач для 10-го класу……………………………………... 14

Приклади задач для 11-го класу……………………………………..... 21

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

В. В. Плахотник

100
КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ
З МАТЕМАТИКИ

Всеукраїнський конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2010–2011 н. р.

За редакцією *О. В. Лісового*

Формат 60х84 1/16. Друк цифровий.
Папір офсетний 80 г/м2.
Зам. № 2012 від 20.12.2011. Наклад 100 прим.

Видавництво: ТОВ «Праймдрук»
01023, м. Київ, вул. Еспланадна, 20, офіс 213
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи
серія ДК № 4222 від 07.12.2011 р.